DOI 10.31891/2307-5732-2018-267-6(1)-21-25
УДК 629.735

С.М. БОЙКО, Ю.М. ШМЕЛЕВ, Е.Е. ВОЛКАНИН, О.М. БОРИСЕНКО
Кременчуцкий летный коледж Национального авиационного университета
С.Я. ВИШНЕВСКИЙ
Винницкий национальный технический университет

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА ПРИ ДИАГНОСТИКЕ СОСТОЯНИЯ АВИАЦИОННОГО ГЕНЕРАТОРА

Исходя из того, что за последние десятилетия количество аварий вертолетов составило не один десяток, актуальной научно-практической задачей является диагностика и прогнозирование изменений состояния работы генератора. В настоящее время проблематикой диагностики авиационной техники в Украине занимаются ученые из Национального авиационного университета, основные работы которых состоят в оптимизации процессов ее технического обслуживания с помощью информационно-управляющих систем [1–4]. Однако в их работах вопросы исследования процессов авиационных генераторов рассматриваются поверхностно, при этом, учет их изменения состояния может существенно повлиять на повышение качества диагностики авиационной техники. Таким образом, актуальной научно-практической задачей является диагностика и прогнозирование изменений состояния работы генератора вертолета. Цель исследования – разработка математической модели исследования основных режимов работы авиационного генератора вертолета при его эксплуатации в реальных режимах работы, то есть определение времени переходов из одного режима работы генератора в другой во всех возможных вариантах, что позволит разработать информационно-управляющую систему диагностики и прогнозирования состояния генератора вертолета. Проведён анализ особенностей эксплуатации и возможных режимов работы авиационного генератора вертолёта. Обоснована необходимость применения марковского процесса для контроля состояния авиационных генераторов. Разработана и предложена для дальнейшей реализации математическая модель определения и описания состояния авиационных генераторов. Полученные уравнения описания отказа одного из генераторов показывают, что значение φi зависит от интенсивности появления события λ, несмотря на тип процесса, что позволит применить стандартные методы построения алгоритма определения беспрерывного марковского процесса при имитации работы генератора вертолета.

Ключевые слова: система контроля состояния, авиационный генератор вертолёта.

S.M. BOIKO, Y.M. SHMELYOV, E.E. VOLKANIN, O.M. BORYSENKO
Kremenchuk Flight College of the National Aviation University
S.YA. VISHNEVSKIY
Vinnytsia National Technical University

APPLICATION OF THE EQUATIONS OF THE MARKOV PROCESS IN DIAGNOSTICS OF THE STATE OF AVIATION GENERATOR

According to the fact that over the past decades, the number of helicopter crashes was not more than one dozen, the actual scientific and practical task is to diagnose and predict changes in the state of the generator. Nowadays, scientists from the National Aviation University are engaged in diagnostics of aviation equipment in Ukraine, whose main work is to optimize its maintenance processes with the help of information and control systems [1-4]. However, in their work, the issues of studying the processes of aviation generators are considered superficially, while taking into account their state changes can significantly affect the improvement of the quality of diagnostics of aviation equipment. Thus, the actual scientific and practical task is to diagnose and predict changes in the state of operation of the helicopters generator. The purpose of the study is to develop a mathematical model for studying the main modes of operation of the helicopter aircraft generator during its operation in real operating modes, that is, determining the time of transitions from one mode of operation of the generator to another of all possible variants, which will allow us to develop an information management system for diagnosing and forecasting the state of the generator helicopter shaft. An analysis of the operational features and possible operating modes of the aircraft helicopter generator was conducted. The necessity of application of the Markov's process for control of the state of aviation generators was substantiated. A mathematical model for determining and describing the condition of aviation generators has been developed and proposed for further realization. The resulting equations of the failure description of one of the generators show that the value of φ depends on the intensity of the occurrence of the event λ, despite the type of process, which will allow the application of standard methods for constructing an algorithm for determining the continuous Markov process in simulating the operation of the helicopter generator.

Keywords: state control system, aircraft generator helicopter.

Изложение основного материала

Учитывая тот факт, что вертолет может иметь два генератора, считается, что вертолет – система, имеющая надежную работу ($P \geq 0{,}9$), которая состоит из i единиц генераторов. Пусть случайное время работы одного генератора имеет положительное распределение вероятности и не зависит от состояния других единиц генератора [4, 5]. В более общей математической модели работы системы, состоящей из i единиц, в которой учитывается взаимосвязь между единицами генераторов, можно считать [5], что показательное распределение имеет случайное время τi совместной работы к выходу из строя одного из имеющихся единиц генераторов, то есть:

$$P\{\tau_i \leq t\} = 1 - e^{-\varphi_i t}, \quad (1)$$

где $\varphi 0 = 0$, $\varphi i > 0$ при $i = 1, 2, \ldots$

Пусть в общем случае $P_{ij(t)}$ – вероятность наличия в момент времени t работоспособных j единиц генераторов, при условии, что в начальный момент времени t = 0 было i единиц работоспособных генераторов. Первым шагом задачи диагностики и прогнозирования вероятности отказа одного из генераторов вертолета является получение уравнения для переходных вероятностей отказа одного из генераторов вертолета.

Разрабатываемой математической моделью является марковский процесс отказа одного из генераторов вертолета ξ_t, $t \in [0, \infty)$ на множестве состояний N = 0, 1, 2, …, в котором переходные вероятности $P_{ij}(t) = P\{\xi_t = j \mid \xi_0 = i\}$, $i, j \in N$ представлены при $t \to 0+$ в виде [5]:

$$P_{i,i-1}(t) = \varphi_i t + o(t); \quad (2)$$

$$P_{ii}(t) = 1 - \varphi_i t + o(t). \quad (3)$$

Скачки процесса простого изменения состояний работы генератора ξ_t представлены на рис. 1. Пусть при t = 0 процесс находится в начальном состоянии i. В момент времени τ_i $P\{\tau_i \le t\} = 1 - e^{-\varphi_i t}$ происходит переход процесса в состояние i – 1 и так далее.

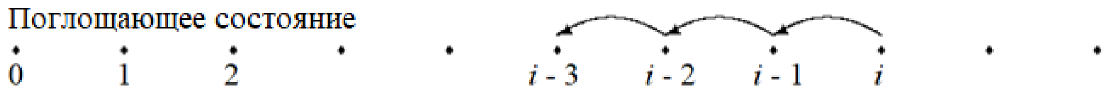

Рис. 1. График изменения состояния генератора вертолета

Первая (обратная) система дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей в случае процесса перехода генератора вертолета из одного состояния в другое имеет вид [5]:

$$\frac{dP_{oj}(t)}{dt} = -\varphi_0 P_{oj}(t); \quad (4)$$

$$\frac{dP_{ij}(t)}{dt} = \varphi_i P_{i-1,j}(t) - \varphi_i P_{ij}(t), \quad (5)$$

где i = 1, 2, … с начальными условиями Pii(0) = 1, $P_{ij(0)} = 0$ при $i \neq j$.

Применив оператор обобщенной производной [5], определенный на аналитических в окрестности нуля функциях, получим:

$$f(s) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j s^j; \quad (6)$$

$$D_s(f) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varphi_j s^{j-1}. \quad (7)$$

Свертывая систему с помощью производящей функции переходных вероятностей

$$G_j(t;z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\varphi_1 \ldots \varphi_i} P_{ij}(t); \quad (8)$$

при $i \in N$, имеем цепочку равенств в виде:

$$\frac{dG_j}{dt} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\varphi_1 \ldots \varphi_i} \frac{dP_{ij}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i}{\varphi_1 \ldots \varphi_{i-1}} \frac{dP_{i-1,j}(t)}{dt} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i}{\varphi_1 \ldots \varphi_{i-1}} \frac{dP_{ij}(t)}{dt} =$$

$$= z\sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^{i-1}}{\varphi_1 \ldots \varphi_{i-1}} \frac{dP_{i-1,j}(t)}{dt} - z\sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^{i-1}}{\varphi_1 \ldots \varphi_{i-1}} \frac{dP_{ij}(t)}{dt} = zG_j - zD_z(G_j) = z(1 - D_z)G_j. \quad (9)$$

Таким образом, первая система дифференциальных уравнений получает вид:

$$\frac{dG_j(t;z)}{dt} = z(1 - D_z)G_j(t;z) \quad (10)$$

с начальным условием $G_j(0;z) = \dfrac{z^j}{\varphi_1 \ldots \varphi_j}$.

Вторая (прямая) система дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей в случае изменения состояния работы генератора вертолета имеет вид [5]:

$$\frac{dP_{i0}(t)}{dt} = -P_{i0}(t)\varphi_0 + P_{i1}(t)\varphi_1; \quad (11)$$

$$\frac{dP_{ij}(t)}{dt} = -P_{ij}(t)\varphi_j + P_{ij+1}(t)\varphi_{j+1}, \quad (12)$$

где j = 1, 2, … с начальными условиями $P_{ii(0)} = 1$, $P_{ij(0)} = 0$ при $i \neq j$.

Свертывая систему с помощью производящей функции переходных вероятностей

$$F_i(t;s) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) s^j \quad (13)$$

при $j \in N$, $|s| \le 1$, имеем цепочку равенств в виде:

$$\frac{dF_i}{dt} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{dP_{ij}(t)}{dt} s^j = -\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t)\varphi_j s^j + \sum_{j=0}^{\infty} P_{i,j+1}(t)\varphi_{j+1} s^j = -s\sum_{j=1}^{\infty} P_{ij}(t)\varphi_j s^{j-1} +$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty} P_{ij}(t)\varphi_j s^{j-1} = -sD_s(F_i) + D_s(F_i) = -(s+1)D_s(F_i). \quad (14)$$

Вторая система дифференциальных уравнений получает вид:

$$\frac{dF_i}{dt} = -(s+1)D_s(F_i) \quad (15)$$

с начальным условием $F_i(0; s) = s^i$.

Соответственно, двойная производящая функция

$$F(t;z;s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\varphi_1 \dots \varphi_i} F_i(t;s) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{z^i}{\varphi_1 \dots \varphi_i} P_{ij}(t) s^j = \sum_{i,j=0}^{\infty} G_j(t;z) s^j \quad (16)$$

удовлетворяет уравнениям:

$$\frac{dF}{dt} = z(1-D_z)F; \quad (17)$$

$$\frac{dF}{dt} = (1-s)D_s(F) \quad (18)$$

с начальным условием $F(0; z; s) = e(zs)$.

Функция $e(z)$, определенная равенством [6]

$$e(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\varphi_1 \dots \varphi_i}, \quad (19)$$

является собственной функцией оператора обобщенной производной D_z, то есть:

$$D_z(e(z)) = e(z). \quad (20)$$

Применим известные выражения переходных вероятностей [5] для математического описания процесса полного отказа генератора вертолета:

$$P_{ij}(t) = \varphi_i \dots \varphi_{j+1} \sum_{n=j}^{i} \frac{e^{-\varphi_n t}}{(\varphi_1 - \varphi_n)(\varphi_{n+1} - \varphi_n)(\varphi_{n-1} - \varphi_n)\dots(\varphi_j - \varphi_n)} \quad (21)$$

при $j < i$, применив которые легко получить решения уравнений (17) и (18) в виде ряда с разделенными переменными:

$$F(t;z;s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\varphi_1 \dots \varphi_i} \overline{C_n}(z) C_n(s) e^{-\varphi_n t}, \quad (22)$$

где

$$\overline{C_n}(z) = z^n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{n+k}}{(\varphi_{n+1} - \varphi_n)\dots(\varphi_{n+k} - \varphi_n)}; \quad (23)$$

$$C_n(s) = s^n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi_{k+1} \dots \varphi_n}{(\varphi_k - \varphi_n)\dots(\varphi_{n-1} - \varphi_n)}. \quad (24)$$

При $\varphi_{i+1} > \varphi_i$, $i \in N$, и $\lim\limits_{i \to \infty} \varphi_i = \infty$ ряд (22) абсолютно сходится при любых значениях z, $|s| < 1$ и $t \in [0, \infty)$. При t = 0 получаем разложение обобщенной экспоненты:

$$e(zs) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\varphi_1 \dots \varphi_i} \overline{C_n}(z) C_n(s). \quad (25)$$

Для процесса отказа генератора как функции линейного типа, когда ($\lambda > 0$), то есть $\varphi i = i\lambda$, оператор обобщенной производной совпадает с обычной производной и имеет вид:

$$D_z \lambda = \frac{d}{ds}. \quad (26)$$

В результате уравнения (17) и (18) принимают вид:

$$\frac{dF}{dt} = \lambda z\left(1 - \frac{d^2 F}{dz^2}\right); \quad (27)$$

$$\frac{dF}{dt} = \lambda(1-s)\frac{dF}{ds} \quad (28)$$

с начальным условием $F(0; z; s) = e^{zs}$. Тогда выражения (22) и (25) принимают вид:

$$F(t;z;s)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z}{\lambda}\right)^n}{n!}e^{\frac{z}{\lambda}}(s-1)^n e^{-n\lambda t};\qquad(29)$$

$$e(zs)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}e^z(s-1)^n.\qquad(30)$$

Суммируя ряд (29), приходим к замкнутому выражению для двойной производящей функции

$$F(t;z;s)=e^{\frac{z}{\lambda}\left(1+(s-1)e^{-\lambda t}\right)}.\qquad(31)$$

Отсюда из определения *F(t; z, s)* получаем:

$$F_i(t;s)=\left(1-e^{-\lambda t}+se^{-\lambda t}\right)^i\qquad(32)$$

при $i\in N$.

Соотношение (32) означает, что случайные времена работы каждого из имеющихся i единиц генераторов не зависят друг от друга; такое свойство независимости имеет место только для процесса линейного типа.

Для приложений в математической теории надежности [4, 5] представляет интерес нахождение аналогичного (32) замкнутого интегрального представления для производящей функции *Fi(t; s)*, как решения уравнений Колмогорова (17) и (18) для процесса отказа одного из генераторов (путем суммирования ряда Фурье (22), при частных предположениях о функции $\varphi i=\varphi(i)$ [7–9].

В случае процесса квадратичного типа полагается, что

$$\varphi_i=i(i-1)\lambda.\qquad(33)$$

Тогда при

$$D_s=\lambda s\frac{d^2}{ds^2}\qquad(34)$$

имеем систему уравнений:

$$\frac{dF}{dt}=\lambda z^2\left(\frac{dF}{dz}-\frac{d^2F}{dz^2}\right);\qquad(35)$$

$$\frac{dF}{dt}=\lambda\left(s-s^2\right)\frac{d^2F}{ds^2}\qquad(36)$$

с начальным условием $F(0;z;s)=e^{zs}$.

В случае процесса полиномиального типа полагают

$$\varphi_i=i(i-1)...(i-k+1)\lambda;\qquad(37)$$

где $k=3, 4, \ldots$

Тогда

$$\frac{dF}{dt}=\lambda z^k\left(\frac{d^{k-1}F}{dz^{k-1}}-\frac{d^kF}{dz^k}\right),\qquad(38)$$

$$\frac{dF}{dt}=\lambda\left(s^{k-1}-s^k\right)\frac{d^kF}{ds^k}\qquad(39)$$

с начальным условием $F(0;z;s)=e^{zs}$.

Замечание. Поскольку вертолет может иметь два генератора, то процесс полиномиального типа сводится процессу квадратичного типа вследствие того, что показатель степени k может принимать лишь значение 2 [5].

В случае процесса степенного типа полагается, что:

$$\varphi_i=i^\rho\lambda;\qquad(40)$$

где $0<\rho<1$.

В случае процесса пуассоновского типа полагается, что

$$\varphi_0=0;\ \varphi_i=\lambda;\qquad(41)$$

где $i=1, 2, \ldots$

тогда

$$D_s(f)=\lambda\frac{f(s)-f(0)}{s}.\qquad(42)$$

Выводы и предложения

Таким образом, полученные уравнения описания отказа одного из генераторов показывают, что значение φi зависит от интенсивности появления события λ, несмотря на тип процесса (квадратичный, полиномиальный, степенной или пуассоновский), что позволит применить стандартные методы построения алгоритма определения беспрерывного марковского процесса при имитации работы генератора вертолета.

Литература

1. Інформаційні технології забезпечення конструктивно-експлуатаційних властивостей повітряних суден та авіаційних двигунів / С. О. Дмитрієв, О. В. Попов, Д. В. Попов, Г. О. Арістов // Вестник двигателестроения. – 2015. – № 2. – С. 67–72.

2. Формалізація процедур та визначення оптимальних програм технічного обслуговування повітряних суден та авіаційних двигунів / С. О. Дмитрієв, В. І. Бурлаков, О. В. Попов, Д. В. Попов // Авиационно-космическая техника и технологии. – 2014. – № 9 (116). – С. 177–181.

3. Деревянко И. Г. Конструкция и эксплуатация вертолета Ми-8МТВ-1 / И. Г. Деревянко. – Кременчуг : КЛК НАУ, 2011. – 142 с.

4. Острейковский В. А. Теория надежности / В. А. Острейковский. – М. : Абрис, 2012. – 463 с.

5. Тимонин В. И. Точные распределения статистик типа Колмогорова-Смирнова, применяемых для анализа остаточной надежности резервированных систем / В. И. Тимонин, М. А. Ермолаева // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2012. – Вып. 10. – С. 66–72.

6. Калинкин А. В. Уравнения марковского процесса гибели в математической теории надежности [Электронный журнал] / А. В. Калинкин // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2013. – Вып. 14. – Режим доступа : http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/1150.html

7. Denisov Y. O. Input Current Parameters Analysis for PFC based on Quasi-Resonant and Conventional Boost / Y. O. Denisov, S. A. Stepenko, A. N. Gorodny, V. A. Kravchenko // International Scientific Conference on Electronics and Nanotechnology(ELNANO): Thirty-Fourth Annual IEEE. – 2014. – P. 393–397.

8. 8. Denisov Y. Switch operation power losses of quasi-resonant pulse converter with parallel resonant circuit / Y. Denisov, A. Gorodny, V. Gordienko, R. Yershov, S. Stepenko, O. Kostyrieva, A. Prokhorova // International Scientific Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO): Thirty-Fourth Annual IEEE. – 2016. – P. 327–332.

9. Gorodniy O. Impact of Supply Voltage Change on the Energy Performance of Boost Quasi-Resonant Converter for Radioelectronic Equipment Power Supplies / O. Gorodniy, V. Gordienko, S. Stepenko, S. Boyko, O. Sereda // Modern Electrical and Energy Systems (MEES). – 2017. – P. 232–235.

References

1. Dmitriev S.O., Popov O.V., Popov D.V., Aristov G.O. (2015). Informacijni texnologiyi zabezpechennya konstruktyvno-ekspluatacijnyh vlastyvostej povitryanyh suden ta aviacijnyh dvyguniv [Information technologies for maintenance of structural and operational properties of flying ships and aviation engines]. *Vestnik dvigatelestroeniya - Herald of engine building*, 2, 67-72 [in Ukrainian].

2. Dmitriev S.O., Burlakov V.I., Popov O.V., Popov D.V. (2013). Formalizaciya procedur ta vyznachennya optymalnyh program tehnichnogo obslugovuvannya povitryanyh suden ta aviacijnyh dvyguniv [Formalization of procedures and definition of optimal maintenance programs for aircraft and aviation engines]. *Aviatsionno-kosmicheskaya tehnika i tehnologii - Aerospace Engineering and Technology*, 9 (116), 177-181 [in Ukrainian].

3. Derevianko I.G. (2011). *Konstruktsiya i ekspluatatsiya vertoleta Mi-8MTV-1 [The design and operation of the Mi-8MTV-1 helicopter]*. Kremenchug: KLK NAU [in Russian].

4. Ostreikovskii V.A. (2012). *Teoriya nadezhnosti [Theory of reliability]*. Moscow: Arbis [in Russian].

5. Timonin V.I., Ermolaeva M.A. (2012). Tochnyie raspredeleniya statistik tipa Kolmogorova-Smirnova, primenyaemyih dlya analiza ostatochnoy nadezhnosti rezervirovannyih sistem [Exact distributions of Kolmogorov-Smirnov statistics used to analyze the residual reliability of redundant systems]. *Elektromagnitnyie volnyi i elektronnyie sistemyi - Electromagnetic waves and electronic systems*, 10, 67-72 [in Russian].

6. Kalinkin A.V. (2013). *Uravneniya markovskogo protsessa gibeli v matematicheskoy teorii nadezhnosti [Equations of the Markov process of decay in the mathematical theory of reliability]*. Inzhenernyiy zhurnal: nauka i innovatsii. Retrieved from: http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/1150.html.

7. Denisov Y. O., Stepenko S. A., Gorodny A. N., Kravchenko V. A. (2014). *Input Current Parameters Analysis for PFC based on Quasi-Resonant and Conventional Boost*, International Scientific Conference on Electronics and Nanotechnology(ELNANO): Thirty-Fourth Annual IEEE.

8. Denisov Y., Gorodny A., Gordienko V., Yershov R., Stepenko S., Kostyrieva O.,Prokhorova A. (2016). *Switch operation power losses of quasi-resonant pulse converter with parallel resonant circuit*, International Scientific Conference on Electronics and Nanotechnology(ELNANO): Thirty-Fourth Annual IEEE.

9. Gorodniy O., Gordienko V., Stepenko S., Boyko S., Sereda O. (2017). *Impact of Supply Voltage Change on the Energy Performance of Boost Quasi-Resonant Converter for Radioelectronic Equipment Power Supplies*, Modern Electrical and Energy Systems (MEES).

Рецензія/Peer review : 15.10.2018 р. Надрукована/Printed :21.11.2018 р.
Рецензент: д.т.н., проф. Сінчук О.М.