

## РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯННЯ ФРЕДГОЛЬМА ДЛЯ РУХУ НЕЗРІВНОВАЖЕНОГО РОТОРА З ДИСКРЕТНИМИ МАСАМИ

Основними методами балансування роторів є балансування за власними формами і балансування за статичними або динамічними коефіцієнтами впливу. У процесі зрівноваження гнучкого ротора за результатами вимірювань прогинів у різних перерізах ротора ідентифікують величину і місце розташування ексцентриситетів (дисбалансів) кожної з мас для подальшої установки компенсуючих вантажів, що їх зрівноважують. Для цього проведено аналіз розв'язків рівняння Фредгольма II роду, що описує рух незрівноваженого ротора. Проаналізовані рівняння, критичні частоти, прогини і форми коливань одномасового і двомасового ротора без урахування гіроскопічних моментів. Обґрунтована можливість усунення дисбалансу, по кожній з форм згину ротора, виявляючи його в прогинах на відповідних критичних частотах обертання.

Ключові слова: гнучкий ротор, вібрації, рівняння Фредгольма, ексцентриситет, прогини, власні форми.

V.P. ROYZMAN, A.V. GOROSHKO, S.A. PETRASCHUK

Khmelnitskyi National University

### SOLUTION OF THE FREDHOLM EQUATION FOR MOTION UNBALANCED LUMPED ROTOR

The main methods of balancing rotors are balancing according to their own forms and balancing according to static or dynamic coefficients of influence. In the process of balancing a flexible rotor, according to the results of measurements of deflections in various sections of the rotor, the magnitude and location of eccentricities (imbalances) of each of the masses are identified for further installation of compensating balancing weights. For this, the analysis of solutions of the Fredholm equation of the second kind, describing the motion of an unbalanced rotor, is carried out. The equations, critical frequencies, deflections and vibration modes of a single-mass and dual-mass rotor are analyzed without taking into account gyroscopic moments. The possibility of eliminating the imbalance for each of the rotor bending forms is substantiated by measuring it in deflections at the corresponding critical rotation frequencies.

Keywords: flexible rotor, vibrations, Fredholm equation, eccentricity, deflections, natural forms.

**Постановка проблеми.** Тенденція отримання більших потужностей в менших габаритах викликає появу у різних галузях техніки машин з гнучкими роторами і гнучкими опорами. Різноманітні дослідження свідчать, що більше 40% аварій таких машин викликані підвищеними вібраціями їх деталей. Найчастіше джерелом підвищених вібрацій є незрівноваженість їх роторів, тобто стан, який характеризується таким розподілом мас, який під час обертання викликає пружний згин ротора і змінні навантаження на опори. Дисбаланс викликає значні вібрації і створює надмірні навантаження в області підшипників, що скорочує термін експлуатації машини. Поряд з конструкторськими методами боротьби з вібраціями ефективним методом є високоякісне балансування роторів з урахуванням їх деформацій. Практика показала, що зниження коливань роторів балансуванням з урахуванням їх деформованості за своїми результатами є рівнозначним конструкторським заходам.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Практика балансування доводить, що більшість роторів сучасних турбомашин і потужного електрообладнання балансують з урахуванням їх гнучкості під час експлуатації, оскільки для них не є ефективними методи балансування жорстких роторів у двох крайніх площинах корекції на низькооберткових балансувальних верстатах [1–3], і зниження динамічних прогинів і реакцій опор має відбуватись на всіх частотах обертання ротора. Основними методами балансування роторів є балансування за власними формами і балансування за статичними або динамічними коефіцієнтами впливу [4]. Гнучкі ротори балансують на робочих швидкостях не у двох, а у трьох і більше площинах корекції, прагнучи виявити, а потім компенсувати дисбаланси, які певним чином розподілені по довжині ротора. Для цього перш за все вимірюють деформації по всій довжині ротора або в деяких місцях, де можуть бути зосереджені найбільші дисбаланси [5–7]. Найчастіше в цих місцях вимірюють прогини ротора, за якими розраховують ексцентриситети і відповідні їм значення дисбалансів, а потім і зрівноважують вантажі.

**Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми.** У процесі зрівноваження гнучкого ротора за результатами вимірювань прогинів у різних перерізах ротора ідентифікують величину і місце розташування ексцентриситетів (дисбалансів) кожної з мас для подальшої установки компенсуючих вантажів, що їх зрівноважують. Таку ідентифікацію можна здійснити, наприклад, розв'язавши рівняння Фредгольма II роду.

**Результати досліджень.** У роботі [8] для аналізу умов збалансованості гнучкого ротора розглядається рівняння Фредгольма відносно  $y(z)$  – прогину ротора у перерізі з координатою  $z$ :

$$y(z) = f(z) + \int_0^l m(s) \omega^2 \alpha(z, s) y(s) ds,$$

де  $f(z) = \int_0^l m(s) \cdot \omega^2 \cdot e(s) \cdot \alpha(z, s) ds$ , де  $e(s)$  – ексцентриситет ротора у перерізі з координатою  $S$ ,  $\alpha(z, s)$  – прогин у точці з координатою  $Z$  під впливом одиничної сили, прикладеної у точці  $S$ ,  $m(s)$  – погонна маса ротора у перетині з координатою  $S$ ,  $\omega$  – кутова частота обертання ротора,  $l$  – довжина ротора.

З теорії інтегральних рівнянь відомо, що розв’язок рівняння Фредгольма можна отримати трьома різними методами і у різних формах. Перший метод, який належить Фредгольму, подає  $y(z)$  у вигляді відношення двох степеневих рядів щодо  $\omega^2$ , кожен з яких має нескінченний радіус збіжності. Інтегральне рівняння розглядається як граничний випадок системи лінійних алгебраїчних рівнянь з  $n$  невідомими при  $n \rightarrow \infty$ . Таким чином рівняння Фредгольма II роду може бути з будь-якою наперед заданою точністю апроксимовано системою лінійних рівнянь, що означає можливість апроксимації ротора з будь-яким розподілом параметрів, ротором, що складається з невагомого вала, який несе  $n$  дисків з масами  $m_1, m_2, \dots, m_n$  та екваторіальними моментами інерції  $I_1, I_2, \dots, I_n$ :

$$\begin{cases} y_i = \sum_{k=1}^n m_k \alpha_{ik} \omega^2 (y_k + e_k) - \sum_{k=1}^n I_k \beta_{ik} \omega^2 (y'_k + \varepsilon_k), \\ y_i = \sum_{k=1}^n m_k \gamma_{ik} \omega^2 (y_k + e_k) - \sum_{k=1}^n I_k \delta_{ik} \omega^2 (y'_k + \varepsilon_k), \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (1)$$

де  $\beta_{ik}$  – прогин під диском  $i$  від одиничного моменту, прикладеного у місці посадки диску  $k$ ,  $\gamma_{ik}$  – кут повороту перерізу у місці посадки диску  $i$  від одиничної сили, прикладеної у місці посадки диску  $k$ . Кожен з дисків в силу похибок виготовлення має радіальні ексцентриситети  $e_1, e_2, \dots, e_n$  і кутові, тобто відхилення осі диска від осі, що проходить через центри інерції  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ . При обертанні вал отримує прогини  $y_1, y_2, \dots, y_n$  і кути повороту  $y'_1, y'_2, \dots, y'_n$  (рис. 1). Обертання вала при прямій синхронній прецесії може бути представлено як коливання в двох взаємно перпендикулярних площинах.

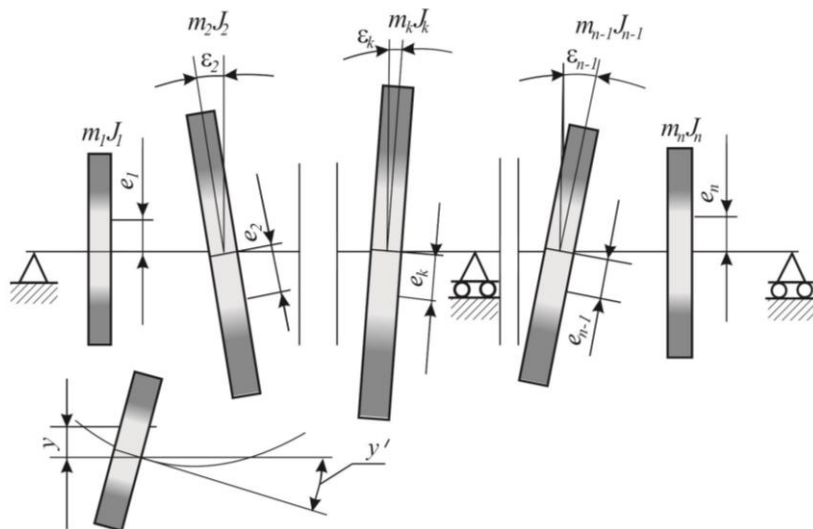


Рис. 1. Схема багатомасового ротора

Запис рівнянь (1) у розгорнутому вигляді і їх розв’язок щодо  $y, y'$  або  $e, \varepsilon$  при великій кількості членів стає громіздким, тому в даній роботі проведено їх аналіз на прикладі одно і двомасового ротора.

*Одномасовий ротор.* Позначивши коефіцієнт впливу вала в місці посадки диска через  $\alpha$ , запишемо вираз для прогину під диском:

$$y = m \cdot \omega^2 (y + e) \cdot \alpha,$$

де  $t$  – маса ротора;  $e$  – ексцентриситет;  $\omega$  – кутова швидкість обертання. Звідси,  $y = \frac{m\omega^2\alpha}{1 - m\omega^2\alpha}$ .

Умова, при якому прогин дорівнює нулю, виконується якщо  $e = 0$ , при цьому знаменник виразу відмінний від нуля. Таким чином, для усунення прогину однодискового ротора необхідно, щоб ексцентриситет дорівнював нулю. Вираз для незрівноваженої сили диска має вигляд:

$$P = m\omega^2 + m\omega^2 \frac{m\omega^2\alpha}{1 - m\omega^2\alpha}. \quad (2)$$

З (2) видно, що відцентрова незрівноважена сила гнучкого ротора має дві складові. Перша з них, що містить  $\omega^2$ , є наслідком початкової незрівноваженості диска, а друга, пропорційна  $\omega^4$  – наслідком пружного прогину ротора. Ця обставина може бути використана для визначення можливих причин підвищених вібрацій машин. З рівняння (2) видно, що для усунення відцентрової незрівноваженої сили на однодисковому роторі його ексцентриситет також має дорівнювати нулю. Природно, що в цьому випадку і реакції опор дорівнюють нулю.

*Двомасовий ротор.* Нехай є невагомий вал, що несе на собі два тонких диска, з масами  $m_1$  і  $m_2$  з

ексцентриситетами  $e_1$  і  $e_2$ , які для простоти лежать в одній площині, що містить вісь ротора. Розглянемо коливання цього валу без урахування гіроскопічних моментів для будь-якого з варіантів розташування дисків, зображених на рис. 2, а, б, в.

У випадку вільних коливань, тобто при  $e_1 = e_2 = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} y_1(\alpha_{11}m_1\omega^2 - 1) + y_2\alpha_{12}m_2\omega^2 &= 0 \\ y_1\alpha_{12}m_1\omega^2 + y_2(\alpha_{22}m_2\omega^2 - 1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Нульовий розв'язок нас не цікавить, оскільки означає відсутність коливань, а ненульовий розв'язок можливий в тому випадку, коли:

$$\begin{vmatrix} m_1\alpha_{11}\omega^2 - 1 & m_2\alpha_{12}\omega^2 \\ m_1\alpha_{21}\omega^2 & m_2\alpha_{22}\omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

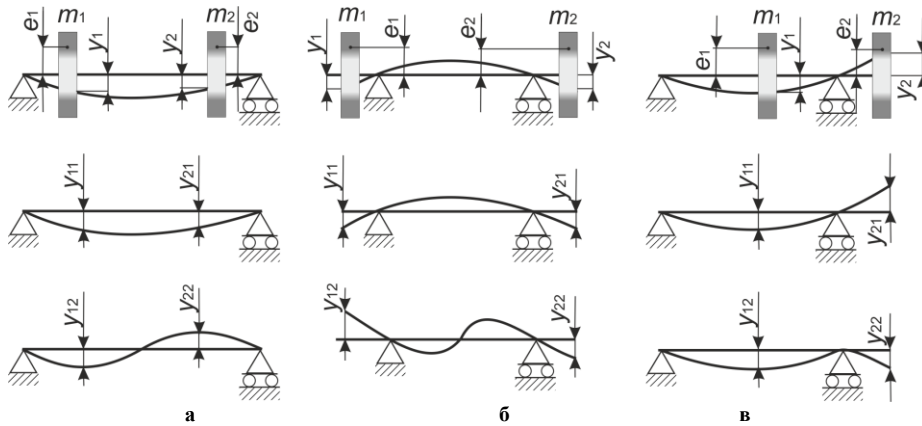


Рис. 2. Власні форми згину двомасових роторів

З цього рівняння знаходимо два значення частоти власних коливань системи або що те саме - критичних частот обертання даного валу. Щоб дізнатися форму згину на відповідних критичних частотах обертання, необхідно знайдені  $\omega_{кр}$  підставити в рівняння (3) і знайти відношення  $y_2 / y_1$ . Безпосередньо з рівнянь (3) знаходимо:

$$\rho_{21} = \frac{y_{21}}{y_{11}} = -\frac{y_{11}m_1\omega_1^2 - 1}{y_{12}m_2\omega_1^2}, \quad \rho_{22} = \frac{y_{22}}{y_{12}} = -\frac{y_{11}m_1\omega_2^2 - 1}{y_{12}m_2\omega_2^2},$$

де  $y_{11}, y_{12}$  - прогини під диском 1 на критичних частотах 1 і 2;  $y_{21}, y_{22}$  - прогини під диском 2 на критичних частотах 1 і 2.

Як видно, характеристика власної форми згину ротора є відношення амплітуд коливань різних точок вала для даного значення власної частоти коливань, причому кожному значенню частоти відповідає своє значення відношення  $y_2 / y_1$ . Підкреслимо, що в аналітичний вираз повного прогину на будь-яких невласних частотах входять елементи кожної з власних форм згину. Так, наприклад, на рис. 2 показана форма згину вала на деякій кутовій швидкості  $\omega$  (крива 1). Вона складена з форми згину на перших критичних частотах -  $\omega_1$  (крива 2) і форми згину на других критичних частотах -  $\omega_2$  (крива 3).

За принципом Даламбера кожен власну форму можна розглядати як епюру переміщень від відповідного інерційного навантаження, перетворюючи завдання динаміки в задачу статyki.

Відповідно до початкових умов, які визначаються, наприклад, завданням початкових прогинів дисків  $y_1$  і  $y_2$  і, отже, незрівноважених сил  $m_1\omega^2$  і  $m_2\omega^2$  утворюються форми пружної лінії. Так, очевидно, якщо початкові умови такі, що  $y_1$  і  $y_2$  лежать в одній площині і по одну сторону від осі вала, то повні коливання будуть відбуватися тільки за симетричною формою (рис. 2, криві 2), а якщо  $y_1$  і  $y_2$  лежать в одній площині, але по різні боки від осі вала, то повні коливання будуть відбуватися за антисиметричною формою (рис. 2, криві 3).

Між координатами епюр переміщень двох різних головних форм існує важлива залежність, яка знадобиться в подальшому:

$$m_1 y_{11} y_{12} + m_2 y_{21} y_{22} = 0.$$

Цей вираз відображає властивість ортогональності двох різних власних форм згину. Фізично це означає, що можлива робота незрівноважених сил від прогинів, розподілених по одній зі своїх форм згину, на переміщеннях по іншій своїй формі згину дорівнює нулю.

За наявності ексцентриситетів на дисках прогини мають такий вигляд:

$$y_1 = \alpha_{11}m_1\omega^2(y_1 + e_1) + \alpha_{12}m_2\omega^2(y_2 + e_2),$$

$$y_2 = \alpha_{21}m_1\omega^2(y_1 + e_1) + \alpha_{22}m_2\omega^2(y_2 + e_2).$$

Звідки:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{B} \begin{vmatrix} (e_1m_1\alpha_{11}\omega^2 + e_2m_2\alpha_{12}\omega^2) & -m_2\alpha_{12}\omega^2 \\ (e_1m_1\alpha_{21}\omega^2 + e_2m_2\alpha_{22}\omega^2) & 1 - m_2\alpha_{22}\omega^2 \end{vmatrix}, \\ y_2 &= \frac{1}{B} \begin{vmatrix} 1 - \alpha_{11}m_1\omega^2 & (e_1\alpha_{11}m_1\omega^2 + e_2m_2\alpha_{12}\omega^2) \\ -m_1\alpha_{21}\omega^2 & (e_1\alpha_{21}m_1\omega^2 + e_2m_2\alpha_{22}\omega^2) \end{vmatrix}, \\ B &= \begin{vmatrix} 1 - \alpha_{11}m_1\omega^2 & -m_2\alpha_{12}\omega^2 \\ -m_1\alpha_{21}\omega^2 & 1 - m_2\alpha_{22}\omega^2 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

Рівняння (4) встановлюють зв'язок між прогинами вала у дисків і їх ексцентриситетами на будь-яких частотах обертання ротора. З (4) видно, що прогини будуть відсутніми за відсутності ексцентриситетів, тобто на всіх частотах обертання, крім критичних, де вони не визначені, оскільки тоді і чисельник і знаменник виразів (4) дорівнює 0. Вирази для незрівноважених сил на дисках мають вигляд:

$$P_1 = m_1\omega^2(e_1 + y_1), \quad P_2 = m_2\omega^2(e_2 + y_2).$$

Підставляючи замість  $y_1$  і  $y_2$  їх вирази з рівнянь (4), отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} P_1B &= m_1e_1\omega^2 \begin{vmatrix} 1 & -\alpha_{12}m_2\omega^2 \\ 0 & 1 - \alpha_{22}m_2\omega^2 \end{vmatrix} + m_1e_2\omega^2 \begin{vmatrix} m_2\alpha_{12}\omega^2 & 0 \\ m_2\alpha_{22}\omega^2 & 1 \end{vmatrix}, \\ P_2B &= m_2e_2\omega^2 \begin{vmatrix} 1 - \omega^2\alpha_{11}m_1 & 0 \\ -m_1\alpha_{21}\omega^2 & 1 \end{vmatrix} + m_2e_1\omega^2 \begin{vmatrix} 1 & m_1\alpha_{11}\omega^2 \\ 0 & m_1\alpha_{21}\omega^2 \end{vmatrix}. \end{aligned} \right\}. \quad (5)$$

За яких умов незрівноважені сили на дисках будуть відсутніми? Вважаючи ліві частини рівнянь (5) рівними нулю (при цьому поки припускаємо, що  $B \neq 0$ , тобто частоти обертання відмінні від критичних) і скорочуючи перше рівняння (5) на  $m_1\omega^2$ , а друге на  $m_2\omega^2$ , маємо:

$$\left. \begin{aligned} e_1(1 - \alpha_{22}m_2\omega^2) + e_2m_2\alpha_{12}\omega^2 &= 0, \\ e_1m_1\alpha_{21}\omega^2 + e_2(1 - \alpha_{11}m_1\omega^2) &= 0. \end{aligned} \right\}. \quad (6)$$

Цим рівнянням задовольняють нульові розв'язки, тобто незрівноважені сили будуть відсутніми на всіх частотах обертання, крім критичних, якщо ексцентриситети дорівнюють нулю. Рівняння (6) допускають існування ненульових розв'язків коли визначник, складений з коефіцієнтів при  $e_1$  і  $e_2$ , дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} 1 - \alpha_{22}m_2\omega^2 & m_2\alpha_{12}\omega^2 \\ m_1\alpha_{21}\omega^2 & 1 - \alpha_{11}m_1\omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Цей визначник відрізняється від визначника «В» лише тим, що у нього замінилися місцями основні члени по одній діагоналі, а по іншій – замість знака «-» стоїть знак «+». Це визначник системи, союзної з системою (5). Після його розкриття можна переконатися, що за значенням він точно дорівнює визначнику «В», який в свою чергу, будучи рівним нулю, визначає наявність критичного режиму, оскільки є частотним рівнянням для визначення критичних кутових швидкостей системи.

Таким чином, задаючи питання, чи можуть на некритичних частотах обертання ( $B \neq 0$ ) бути відсутніми незрівноважені сили при наявності ексцентриситетів у дисків (ненульові розв'язки рівняння Фредгольма), ми отримаємо відповідь: таких частот обертання, крім критичних, не існує. Сили, ексцентриситети і прогини відносяться лише до критичних частот обертання і у рівняннях (5) мова йде про сили, здатні викликати згин лише за власною формою.

Співвідношення між ексцентриситетами знаходить з рівняння (6):

$$\frac{e_1}{e_2} = -\frac{m_2\alpha_{12}\omega_{кр}^2}{1 - m_2\alpha_{22}\omega_{кр}^2} = \frac{1 - m_1\alpha_{11}\omega_{кр}^2}{m_1\alpha_{21}\omega_{кр}^2},$$

де  $\omega_{кр}$  – критична кутова швидкість. Порівнюючи цей вираз з виразом для  $\rho$  бачимо, що вони однакові і дорівнюють характеристиці власної форми згину, тобто все, що говорилося про властивості амплітуд власних форм згину, справедливо і для ексцентриситетів власних форм, тобто таких ексцентриситетів, які розподілені подібно до відповідних власних форм згину ротора:

$$\rho_{21} = \frac{y_{21}}{y_{11}} = \frac{e_{21}}{e_{11}}, \quad \rho_{22} = \frac{y_{22}}{y_{12}} = \frac{e_{22}}{e_{12}}, \quad (7)$$

де  $e_{11}, e_{21}$  – відповідно ексцентриситети першого і другого дисків, задані за першою власною формою згину ротора;  $e_{12}, e_{22}$  – відповідно ексцентриситети першого і другого дисків, задані за другою власною формою згину ротора.

Задавши початкові ексцентриситети відповідно до рівняння (7) але за другою власною формою згину ротора, ми тим самим задаємо антисиметричну форму згину і практично не отримуємо першу власну форму згину, що відповідає першій критичній кутовій швидкості. І, навпаки, для відсутності незрівноважених сил, що викликають згин вала за другою власною формою (на другій критичній кутовій швидкості), необхідно задавати дисбаланси зі співвідношення  $\rho_{21} = e_{21} / e_{11}$ , тобто за симетричною формою згину. Іншими словами, залишкові дисбаланси після зрівноваження повинні бути ортогональними до власної форми згину, яку усувають, тобто:

$$m_1 e_{12} y_{11} + m_2 e_{22} y_{21} = 0.$$

**Висновки.** Проведений аналіз показав, що умовами збалансованості гнучкого ротора є:

- у разі, якщо усі  $e$  і  $\varepsilon$  дорівнюють нулю, на роторі відсутні всі незрівноважені сили і моменти;
- за наявності на роторі залишкових  $e$  і  $\varepsilon$  для усунення прогину по одній з власних своїх форм згину необхідно виконати умову ортогональності залишкових  $e$  і  $\varepsilon$  до власної форми, що усувається.

Для практики зрівноваження це означає, що оскільки добитися ідеальної збалансованості ротора ( $e_1 = e_2 = 0$ ) неможливо, то величину і кут залишкових дисбалансів слід залишати такими, щоб вони утворювали ту власну форму згину ротора, яка не потрапляє в діапазон експлуатаційних частот обертання машини.

Наприклад, якщо у дводискового ротора перша критична частота лежить в діапазоні експлуатаційних частот обертання, а друга – далеко за ними, то слід розраховувати залишкові дисбаланси так, щоб вони створювали другу власну форму згину. У цьому випадку вібрації на першій критичній кутовій швидкості є безпечними через відсутність незрівноважених сил, здатних порушити першу форму згину, а наявні незрівноважені сили, що згинають вал за власною другою формою, не є небезпечними, оскільки є ортогональними до згину вала за першою формою. Більше того, як показала практика, в цьому випадку ротор поводить себе навіть стабільніше і в околі першої критичної кутовій швидкості.

### Література

1. Куменко А. Балансировка гибких роторов и валопроводов на основе систем КОМПАКС® с применением датчиков вала / А. Куменко // Деловой журнал Neftegaz. RU. – 2015. – № 3. – С. 58–61
2. Сидоров И.Н. Итерационный алгоритм идентификации коэффициентов жесткости и демпфирования опор разгоннобалансировочного стенда при балансировке гибких роторов / И.Н. Сидоров, В.В. Туктарова // Научно-технический вестник Поволжья. – 2014. – № 6. – С. 329–332.
3. Dimarogonas A. D., Paipetis S. A., Chondros T. G. Analytical methods in rotor dynamics. Berlin–Heidelberg–New York–Springer Verlag, 2013, Darlow M. S. Balancing of high-speed machinery. Springer Science & Business Media. 2012.
4. Галяка В.Г. Особенности практической балансировки роторов турбокомпрессорных агрегатов, основанные на экспериментальном уточнении их динамических моделей / В. Г. Галяка, В.И. Симоновский // Проблемы машиностроения 10. – 2007. – 1. – С. 75–79.
5. M. E. Levit et al. Manual balancing. Moscow: Mashinostroenie, 1992. 464 p.
6. Darlow M. S. 2012. Balancing of high-speed machinery, Springer Science & Business Media.
7. Zhou S., Shi J. 2001. Active balancing and vibration control of rotating machinery: a survey. Shock and Vibration Digest, T. 33, № 5. P. 361–371.
8. Ройзман В.П. Идентификация и балансировка гибких роторных систем : монография / В.П. Ройзман. – Хмельницкий : ХНУ, 2017. – 186 с.

### References

1. Kumenko A. Balansirovka gibkikh rotorov i valoprovodov na osnove sistem KOMPAKS® s primeneniem datchikov vala / A. Kumenko // Delovoj zhurnal Neftegaz. RU. – 2015. – № 3. – S. 58–61
2. Sidorov I.N. Iteracionnyj algoritm identifikacii koefficientov zhestkosti i dempfirovaniya opor razgonnobalansirovochnogo stenda pri balansirovke gibkikh rotorov / I.N. Sidorov, V.V. Tuktarova // Nauchno-tehnicheskij vestnik Povolzhya. – 2014. – № 6. – S. 329–332.
3. Dimarogonas A. D., Paipetis S. A., Chondros T. G. Analytical methods in rotor dynamics. Berlin–Heidelberg–New York–Springer Verlag, 2013, Darlow M. S. Balancing of high-speed machinery. Springer Science & Business Media. 2012.
4. Galyaka V.G. Osobennosti prakticheskoy balansirovki rotorov turbokompressornyh agregatov, osnovannye na eksperimentalnom utocnenii ih dinamicheskikh modelej / V. G. Galyaka, V.I. Simonovskij // Problemy mashinostroeniya 10. – 2007. – 1. – S. 75–79.
5. M. E. Levit et al. Manual balancing. Moscow: Mashinostroenie, 1992. 464 p.
6. Darlow M. S. 2012. Balancing of high-speed machinery, Springer Science & Business Media.
7. Zhou S., Shi J. 2001. Active balancing and vibration control of rotating machinery: a survey. Shock and Vibration Digest, T. 33, № 5. R. 361–371.
8. Rojzman V.P. Identifikaciya i balansirovka gibkikh rotornyh sistem : monografiya / V.P. Rojzman. – Hmelnickij : HNU, 2017. – 186 s.