

АНАЛІЗ РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТЕЙ ПІКІВ У ВИПАДКОВОМУ ВІБРАЦІЙНОМУ СИГНАЛІ

Одним з найбільш інформативних параметрів, який може бути застосований для оцінки поточного технічного стану механічних систем, є вібрація. Вібродіагностика проводиться на працюючому обладнанні, без порушення виробничого циклу. Це важливо для систем, які працюють в безперервному режимі, де зупинка для проведення діагностики є технологічно і економічно невиправданою. Вібродіагностичні заходи значно знижують ймовірність виникнення аварійної ситуації на об'єктах, а їх ремонт проводиться тільки тоді і там, де це дійсно необхідно. В наш час вібродіагностика, особливо аналіз даних, здійснюється головним чином за рахунок застосування відповідного програмного забезпечення. Сучасне програмне забезпечення вимагає складної програмної реалізації певних методик і алгоритмів для проведення вібродіагностики, оскільки їх недосконалість вимагає участі оператора в аналізі діагностичної інформації. Під час вібраційної діагностики різні способи руйнування механічних систем можна розділити на дві широкі категорії. Першу категорію можна назвати відмовою першого проходу, оскільки відмова очікується в перший раз, коли напруга або зсув перевищує деякий критичний рівень. Виникнення відмови зазвичай пов'язане з виникненням великих напруг або зсувів в деталях та елементах механізмів, тому стохастичний аналіз відмови вимагає вивчення екстремальних значень процесу. Актуальні два різні типи екстремальних проявів. Крихке руйнування (розлом) і деформація (вигин) – два види руйнування, які можна віднести до цієї категорії. Іншою широкою категорією відмов є втома, за якої відмова відбувається через накопичення пошкоджень. Метою цієї статті є аналіз та моделювання розподілу ймовірностей піків вібраційного сигналу як критерію оцінки ймовірності відмови будь-якого типу, коли динамічний відгук системи є випадковим процесом.

Ключові слова: аналіз, розподіл ймовірностей піків, випадковий вібраційний сигнал, механічні системи, вібрація, вібродіагностика, обладнання, цикл, ремонт, програмне забезпечення, втома, відмова, пошкодження.

A. PEREDERKO

Odessa State Academy of Technical Regulation and Quality

PEAK PROBABILITIES DISTRIBUTION ANALYSIS IN THE RANDOM VIBRATION SIGNAL

One of the most informative parameters that can be used to assess the current technical condition of mechanical systems is vibration. Vibrodiagnostic is carried out on the working equipment, without disturbance of a production cycle. This is important for systems that operate in a continuous mode where the stop for diagnostics is technologically and economically unjustified. Vibrodiagnostic measures significantly reduce the likelihood of an emergency situation at the facilities, and their repair is carried out only when and where it is really necessary. Nowadays, vibrodiagnostic, especially data analysis, is carried out mainly through the use of appropriate software. Modern software requires complex software implementation of certain techniques and algorithms for vibrodiagnostic, as their imperfection requires the participation of the operator in the analysis of diagnostic information. In vibration diagnostics, various methods of destruction of mechanical systems can be divided into two broad categories. The first category can be called the failure of the first pass, because the failure is expected for the first time when the voltage or shift exceeds a critical level. The occurrence of failure is usually associated with the occurrence of large stresses or shifts in the parts and elements of the mechanisms, so stochastic analysis of failure requires the study of extreme values of the process. Two different types of extreme manifestations are relevant. Fragile fracture and deformation (bending) are two types of destruction that can be classified in this category. Another broad category of failures is fatigue, in which failure occurs due to the accumulation of damage. The purpose of this paper is to analyze and model the probability distribution of vibration signal peaks as a criterion for estimating the probability of failure of any type when the dynamic response of the system is a random process.

Keywords: analysis, probability distribution of peaks, random vibration signal, mechanical systems, vibration, vibration diagnostics, equipment, cycle, repair, software, fatigue, failure, damage.

В даний час вібродіагностика є найбільш ефективним і технологічним методом для визначення технічного стану різних механічних вузлів. У тому ж час цей метод є одним з найскладніших методів технічної діагностики, що обумовлено як кінематичною складністю об'єкту діагностування, так і складністю аналізу сигналів вібрації.

Термін «пік» (*peak*) використовується для позначення суто локальних екстремумів вібраційного сигналу в часі. Це точки на графіку сигналу де перша похідна за часом дорівнює нулю, а друга похідна негативна. Більш глобальний вид проблеми, яку ми розглянемо, включає в себе екстремальне значення деякого випадкового процесу $\{X(t)\}$ протягом фіксованого інтервалу часу $0 \leq t \leq T$ [1, 3].

Прогнозування відмови першого проходу пов'язано з виникненням великого глобального екстремуму, в той час як накопичення втомного пошкодження, як правило, апроксимуються залежно тільки від послідовності локальних екстремумів процесу напружень або деформацій.

При проведенні аналізу стохастичного процесу в часі природно зважати на характерну частоту виникнення певних подій. Мабуть, найбільш очевидним було б брати до уваги місцеві максимуми, які називають піками, або місцеві мінімуми, які ми називаємо впадинами. Не настільки очевидним, але часто кориснішим є дослідження виникнення перетину рівня $\mu X(t)$ за $X(t)$ в часі [2, 3].

Позначимо як $vX(u, t)$ очікувану швидкість виникнення події $X(t) = u$, де $X(t) > 0$, а $v X(u, t)$ позначимо як очікувану швидкість події $X(t) = u$ при $X(t) < 0$. Зазвичай їх називають швидкістю перетину

вгору і швидкістю перетину вниз відповідно рівня $X=u$, як показано на рис. 1. Очікувана кількість перетинів протягом будь-якого часового інтервалу кінцевої довжини є інтегралом $\nu X + (u, t)$ за інтервал. Зокрема, для нестационарного процесу швидкість перетинів може бути більш чітко зрозуміла, якщо її пов'язувати з ймовірністю виникнення пересічення протягом невеликого збільшення часу.

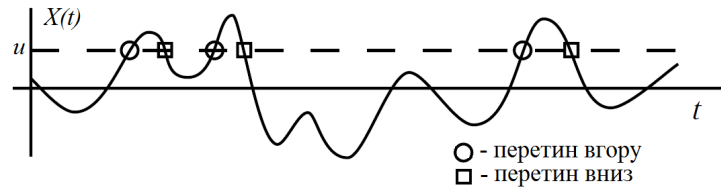


Рис. 1. Перетин рівня u випадковим сигналом $X(t)$

Таким чином, ми отримаємо розподіл ймовірностей з розгляду частоти виникнення. Спочатку ми визначаємо $\nu p [t; X(t) \leq u]$ як очікувану швидкість появи піків, що не перевищують рівень u . Далі для нескінченно малого тимчасового інтервалу t ми можемо сказати, що очікувана кількість входжень в цьому інтервалі збігається з ймовірністю одного входження в цьому інтервалі, оскільки ми можемо знехтувати ймовірністю двох або більше входжень. Таким чином, отримуємо:

$$\nu p [t; X(t) \leq u] \Delta t = P(\text{peak} \leq u, \text{ при } [t, t + \Delta t]), \quad (1)$$

так як

$$\nu p(t) \Delta t = P(\text{peak}, \text{ при } [t, t + \Delta t]), \quad (2)$$

в (2) $\nu p(t)$ – загальна очікувана частота появи піків, яка є межею при переході u до нескінченності $\nu p [t; X(t) \leq u]$. Крім того, можна записати, що

$$\begin{aligned} P(\text{peak} \leq u, \text{ при } [t, t + \Delta t]) &= \\ &= P(\text{peak}, \text{ при } [t, t + \Delta t]) P(\text{peak} \leq u | \text{peak}, \text{ при } [t, t + \Delta t]). \end{aligned}$$

Остаточний проміжок часу умовної ймовірності в цьому виразі є саме тим, що ми вважаємо кумулятивною функцією розподілу для піку в момент часу t :

$$F_{p(t)}(u) \equiv P(\text{peak} \leq u | \text{peak}, \text{ при } [t, t + \Delta t]).$$

З рівнянь (1) і (2) ми визначаємо дану кумулятивну функцію розподілу як:

$$F_{p(t)}(u) = \frac{\nu p [t; X(t) \leq u]}{\nu p(t)}. \quad (3)$$

Таким чином, ми бачимо, що визначення розподілу ймовірності піків залежить від знаходження швидкості появи піків нижче будь-якого рівня u . По-перше, відзначимо, що існує $U[-\dot{X}(t)]$ – процес, який має позитивний одиничний крок на кожному піку $X(t)$ і має негативний одиничний крок в кожній впадині $X(t)$. Таким чином, похідна $-\ddot{X}(t)\delta[-\dot{X}(t)]$ цього процесу має позитивні і негативні поодинокі дельта-функції Дірака на піках і впадинах відповідно. Помноживши на $U[-\dot{X}(t)]$, ми можемо виключити негативні дельта-функції Дірака, щоб вважати тільки піки. Точно так само ми можемо помножити на $U[u - X(t)]$, щоб усунути всі піки вище рівня u . Таким чином, ми отримуємо швидкість появи піків, що не перевищують рівень u , так як

$$\nu p [t; X(t) \leq u] = E(-\ddot{X}(t)\delta[-\dot{X}(t)]U[-\dot{X}(t)]U[u - X(t)]). \quad (4)$$

Підставимо (4) в рівняння (3) і отримаємо:

$$F_{p(t)}(u) = \frac{E(-\ddot{X}(t)\delta[-\dot{X}(t)]U[-\dot{X}(t)]U[u - X(t)])}{E(-\ddot{X}(t)\delta[-\dot{X}(t)]U[-\dot{X}(t)])},$$

яка може бути переписана з точки зору спільних функцій щільності ймовірності як

$$F_{p(t)}(u) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (-z)\delta(-v)U(-z)U(u-w)p_{X(t)\dot{X}(t)\ddot{X}(t)}(w, v, z)dw dv dz}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (-z)\delta(-v)U(-z)p_{\dot{X}(t)\ddot{X}(t)}(v, z)dv dz},$$

або

$$F_{p(t)}(u) = \frac{\int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^u |z| p_{X(t)\dot{X}(t)\ddot{X}(t)}(w, 0, z)dw dz}{\int_{-\infty}^0 |z| p_{\dot{X}(t)\ddot{X}(t)}(0, z)dz}. \quad (5)$$

$Z(t) \equiv U[X(t) - u]$ – процес, який переходить вперед і назад між рівнем нуля та одиницею.

Вибір похідної по u тепер дає функцію щільності ймовірності для розподілу піків у вигляді

$$p_{P(t)}(u) = \frac{\int_{-\infty}^0 |z| p_{X(t), \dot{X}(t), \ddot{X}(t)}(u, 0, z) dz}{\int_{-\infty}^0 |z| p_{\dot{X}(t), \ddot{X}(t)}(0, z) dz} \quad (6)$$

Рівняння (5) та (6) описують розподіл ймовірностей будь-якого піка, який відбувається в околиці часу t . Імовірність того, що пік знаходиться в будь-якому заданому інтервалі, можна знайти безпосередньо з рівняння (5) або від інтегрування рівняння (6). Рівняння (6) також зручне для оцінки інших величин, таких як середнє значення:

$$\mu p(t) \equiv E[P(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} u p_{P(t)}(u) du,$$

та середньоквадратичне значення:

$$E[P^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 p_{P(t)}(u) du,$$

і дисперсія:

$$[\sigma P(t)] = E[P^2(t)] - [\mu P(t)]^2.$$

Припускаємо, що пік може мати місце при будь-якому значенні t , але в дійсності може бути чи не бути пік в околиці певного t . Отримуємо умовний розподіл ймовірностей і умовні моменти піку $P(t)$ в околиці t , враховуючи, що такий пік існує.

Виходячи з рівнянь (5) і (6) можна відзначити, що для знаходження розподілу ймовірності піку $P(t)$ необхідно знати спільний розподіл ймовірностей $X(t)$, $\dot{X}(t)$ і $\ddot{X}(t)$. Це і очікувалося, так як виникнення піку $P(t)$ на рівні u вимагає перетину подій $X(t) = u$, $\dot{X}(t) = 0$ і $\ddot{X}(t) < 0$. Однак необхідність в спільному розподілі ймовірностей трьох випадкових величин може зробити ці вирази трохи складнішими, ніж більшість з розглянутих раніше. Один окремий випадок, коли вирази відносно прості – це процес, в якому $\{X(t)\}$ є гаусовським і стаціонарним. Зокрема, треба відзначити, що $\dot{X}(t)$ не залежить від пари $[X(t), \ddot{X}(t)]$. Таким чином, єдиними параметрами в спільному розподілі трьох гауссовських випадкових величин є три стандартних відхилення і коефіцієнт кореляції між $X(t)$ і $\dot{X}(t)$. Однак цей коефіцієнт кореляції є в точності негативним параметром смуги пропускання α_2 . Таким чином, ми бачимо, що α_2 , на додаток до інших його інтерпретацій, є параметром, який керує розподілом піків $\{X(t)\}$.

Розглянемо розподіл піків для стаціонарного гаусовського процесу. Знайдемо кумулятивну функцію розподілу і ймовірність функції щільності для піків стаціонарного гаусовського процесу $\{X(t)\}$ в випадковому вібраційному сигналі (рис. 2) в середовищі MathCAD [8, 9].

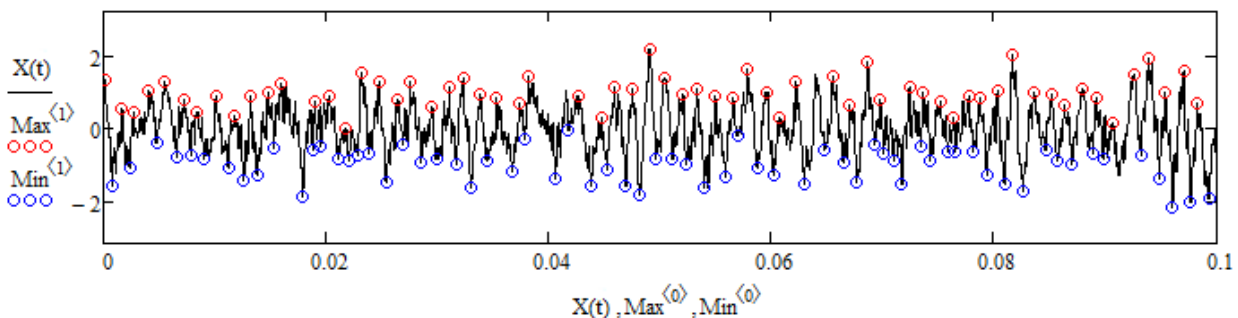


Рис. 2. Модель випадкового вібраційного сигналу $X(t)$ з піками Max і Min

Так як $\dot{X}(t)$ не залежить від $[X(t), \ddot{X}(t)]$, то ми можемо виокремити $p_{\dot{X}(t)}(0)$ як з чисельника, так і з знаменника рівняння (6) і отримаємо:

$$p_P(u) = \frac{\int_{-\infty}^0 |z| p_{X\ddot{X}}(u, z) dz}{\int_{-\infty}^0 |z| p_{\ddot{X}}(z) dz} = \frac{(2\pi)^{1/2}}{\sigma_{\ddot{X}}} \int_{-\infty}^0 |z| p_{X\ddot{X}}(u, z) dz.$$

Використовуючи функцію умовної щільності ймовірності, це можна переписати як:

$$p_P(u) = \frac{(2\pi)^{1/2}}{\sigma_{\ddot{X}}} p_X(u) \int_{-\infty}^0 |z| p_{\ddot{X}}(z|X=u) dz.$$

Умовний розподіл ймовірностей також нормальний (гаусовський), тому ми можемо записати його так:

$$p_{\ddot{X}}[z|X=u] = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \sigma'} \exp\left(-\frac{1}{2} \left[\frac{z - \mu'}{\sigma'}\right]^2\right),$$

в якому умовне середнє μ' відхилення $\ddot{X}(t)$:

$$\mu' \equiv E[\ddot{X}(t)|X(t)=u] = \rho_{X(t)\ddot{X}(t)} \left(\frac{\sigma_{\ddot{X}}}{\sigma_X} \right) (u - \mu_X) = -\alpha_2 \frac{\sigma_{\ddot{X}}}{\sigma_X} (u - \mu_X),$$

а також стандартне σ' відхилення $\ddot{X}(t)$:

$$\sigma' = \sigma_{\ddot{X}} \left(1 - \rho_{X(t)\ddot{X}(t)}^2 \right)^{1/2} = \sigma_{\ddot{X}} (1 - \alpha_2^2)^{1/2}.$$

Підстановка цієї гаусової форми дає вираз:

$$p_P(u) = \frac{-1}{\sigma_{\ddot{X}} \sigma'} p_X(u) \int_{-\infty}^0 z \exp\left(-\frac{1}{2} \left[\frac{z - \mu'}{\sigma'} \right]^2\right) dz,$$

який може бути написаний як:

$$p_P(u) = p_X(u) \left(\frac{\sigma'}{\sigma_{\ddot{X}}} \exp\left[-\frac{\mu'^2}{\sigma'^2}\right] - (2\pi)^{1/2} \frac{\mu'}{\sigma_{\ddot{X}}} \Phi\left[-\frac{\mu'}{\sigma'}\right] \right),$$

або

$$p_P(u) = p_X(u) \left((1 - \alpha_2^2)^{1/2} \exp\left[-\frac{\alpha_2^2 (u - \mu_X)^2}{2(1 - \alpha_2^2) \sigma_X^2}\right] + (2\pi)^{1/2} \frac{\alpha_2 (u - \mu_X)}{\sigma_X} \Phi\left[\frac{\alpha_2 (u - \mu_X)}{(1 - \alpha_2^2)^{1/2} \sigma_X}\right] \right).$$

А заміна гаусовської форми на $p_X(u)$ дає функцію щільності ймовірності у вигляді:

$$p_P(u) = \frac{(1 - \alpha_2^2)^{1/2}}{(2\pi)^{1/2} \sigma_X} \exp\left[-\frac{\alpha_2^2 (u - \mu_X)^2}{2(1 - \alpha_2^2) \sigma_X^2}\right] + \frac{\alpha_2 (u - \mu_X)}{\sigma_X^2} \exp\left[-\frac{(u - \mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right] \Phi\left[\frac{\alpha_2 (u - \mu_X)}{(1 - \alpha_2^2)^{1/2} \sigma_X}\right]. \quad (7)$$

Відповідна кумулятивна функція розподілу $F_P(u)$ може бути записана в більш простій формі:

$$F_P(u) = \Phi\left[\frac{u - \mu_X}{(1 - \alpha_2^2)^{1/2} \sigma_X}\right] - \alpha_2 \exp\left[-\frac{(u - \mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right] \Phi\left[\frac{\alpha_2 (u - \mu_X)}{(1 - \alpha_2^2)^{1/2} \sigma_X}\right]. \quad (8)$$

Граничні форми цього розподілу для $\alpha_2 = 1$ і $\alpha_2 = 0$ дають результати, що стосуються розподілу піків. Для вузькосмугового сигналу, коли α_2 наближається до одиниці, ми бачимо, що деякі аргументи в $p_P(u)$ і $F_P(u)$ прагнуть до нескінченності. Для функції $\Phi(\cdot)$ ми повинні належним чином враховувати знак нескінченного аргументу, оскільки $\Phi(\infty) = 1$ і $\Phi(-\infty) = 0$. Таким чином, ми отримуємо абсолютно інші результати для $u > \mu_X$, ніж ми могли отримати для $u < \mu_X$. Для $\alpha_2 = 1$ отримуємо:

$$p_P(u) = \frac{(u - \mu_X)}{\sigma_X^2} \exp\left[-\frac{(u - \mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right] U(u - \mu_X), \quad (9)$$

а також

$$F_P(u) = \left(1 - \exp\left[-\frac{(u - \mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right] \right) U(u - \mu_X). \quad (10)$$

В окремому випадку, коли $\mu_X = 0$, це як раз розподіл Релея, яким описується гаусовський процес. Коли $\mu_X \neq 0$, ми бачимо, що розподіл піків має ту ж форму, що і розподіл амплітуди Релея, але воно зсувається, щоб зробити μ_X найменшим можливим значенням піку. Узгодження розподілу піків і розподілу амплітуд граничного вузькосмугового процесу узгоджується з попередніми спостереженнями про те, що вузькосмуговий процес можна розглядати як гармонійну функцію з повільно змінюваною амплітудою і фазою. Оскільки вузькосмугова амплітуда змінюється повільно, ми можемо сказати, що кожен пік вузькосмугового процесу дорівнює амплітуді процесу в цей момент часу, тому дві величини мають однаковий розподіл ймовірностей.

Для протилежної екстремальної ситуації з $\alpha_2 = 0$ розподіл ймовірностей піків стає просто гаусовським розподілом $X(t)$:

$$p_P(u) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \sigma_X} \exp\left[-\frac{(u - \mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right], \quad F_P(u) = \Phi\left[\frac{u - \mu_X}{\sigma_X}\right]$$

Зокрема, це відповідає факту, що α_2 є таким самим показником, як коефіцієнт нерівномірності для Гаусового процесу. Таким чином, якщо $\alpha_2 = 0$ і процес має кінцеві швидкості перетину, то швидкість появи піків є нескінченною. Однак якщо швидкість виникнення піків нескінченна, тоді можливо, що всюди по ходу процесу можуть бути піки, від яких слід очікувати, що розподіл піків має бути таким же, як розподіл $X(t)$. Графіки на рис. 3 показують функцію щільності ймовірності $p_P(u)$ для піків при кількох значеннях α_2 в діапазоні 0...1.

На рис. 3 наведено отримані в MathCAD розподіли ймовірностей піків для моделі випадкового вібраційного сигналу (рис. 2). Розподіл для піків Min нанесений пунктирною лінією, а для піків Max нанесений суцільною лінією.

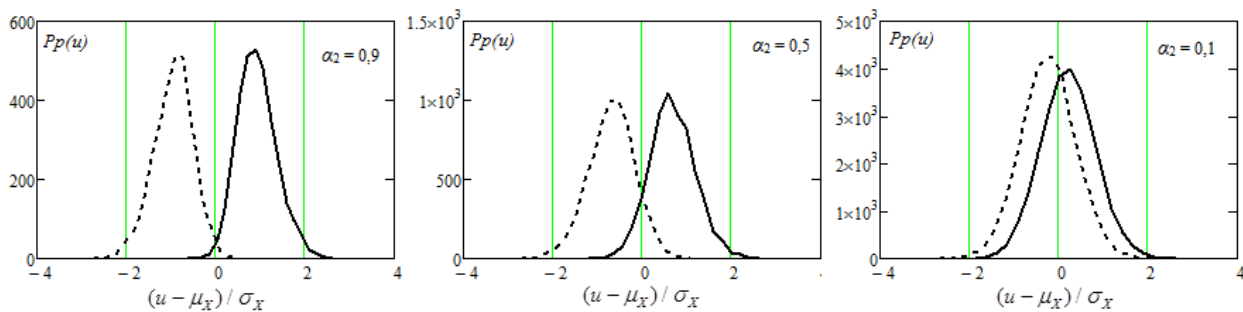


Рис. 3. Розподіл ймовірності піків сигналу $X(t)$ в залежності від значень α_2

В наш час йде активне випробування нетрадиційних підходів та методів в частині обробки і аналізу вихідної інформації при вібродіагностиці. Основними критеріями застосування нових методів є: ефективність, оптимальне співвідношення ціна – якість, технологічність, можливість роботи в реальному масштабі часу. В цьому руслі, з метою підвищення достовірності та глибини діагностування намітилася тенденція використання одночасно декількох методів при обробці та аналізі результатів вимірювань вібраційного сигналу. Так, діагностування «класичних» дефектів, сигнал яких описується однією-трьма гармоніками, все ж краще проводити за допомогою звичайного спектрального аналізу вібраційних сигналів. Однак якщо в отриманому спектрі вібраційного сигналу присутні близько десятка гармонік, і навіть більше, то до аналізу такого сигналу потрібно залучати додаткові ресурси. Тому, опираючись на отримані результати, можна сказати, що аналіз розподілу ймовірностей піків вібраційного сигналу можна використовувати як допоміжний критерій при оцінці ймовірності відмови будь-якого типу, коли динамічний відгук системи є випадковим процесом. Необхідно також пам'ятати, що цей критерій працює в умовах діагностики та прогнозування на відмову через втомленість систем з існуючими дефектами, а не з дефектами, що тільки зароджуються.

Література

1. Cyril Harris, Piersol Allan. Shock and Vibration Handbook. McGraw-Hill Professional, 2001. 1450 p.
2. Гольдин А.С. Вибрация роторных машин / А.С. Гольдин. – М. : Машиностроение, 1999. – 344 с.
3. Вибрация в технике : справочник : в 6 томах. – М. : Машиностроение, 1981.
4. Руссов В.А. Диагностика дефектов вращающегося оборудования по вибрационным сигналам / В.А. Руссов. – Пермь, 2012. – 252 с.
5. Костюков В. Н. Основы виброакустической диагностики и мониторинга машин / В. Н. Костюков, А. П. Науменко. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2011.
6. Федер Е. Фракталы / Е. Федер ; пер. с англ. – М. : Мир, 1991.
7. Щедрин В.И. Применение теории фракталов для обнаружения дефектов роторных узлов подвижного состава железнодорожного транспорта / В. И. Щедрин // Тез. докл. науч.-техн. конф. – Самара, 2005.
8. Антипенский Р. Разработка моделей первичных сигналов в программной среде MathCAD / Р. Антипенский // Компоненты и технологии. – 2007. – № 3. – ISSN 2079-6811.
9. Решение инженерных задач в пакете MathCAD / [Ю.Е. Воскобойников и др. ; под ред. Ю.Е. Воскобойникова]. – Новосибирск : НГАСУ(Сибстрин), 2013. – 120 с.

References

1. Cyril Harris, Piersol Allan. Shock and Vibration Handbook. McGraw-Hill Professional, 2001. 1450 p.
2. Goldin A.S. Vibratsiya rotornykh mashin / A.S. Goldin. – M. : Mashinostroenie, 1999. – 344 s.
3. Vibratsiya v tehnikе : spravochnik : v 6 tomah. – M. : Mashinostroenie, 1981.
4. Russov V.A. Diagnostika defektov vrashayushegosya oborudovaniya po vibratsionnym signalam / V.A. Rusov. – Perm, 2012. – 252 s.
5. Kostyukov V. N. Osnovy vibroakusticheskoy diagnostiki i monitoringa mashin / V. N. Kostyukov, A. P. Naumenko. – Omsk : Izd-vo OmGTU, 2011.
6. Feder E. Fraktaly / E. Feder ; per. s angl. – M. : Mir, 1991.
7. Shedrin V.I. Primenenie teorii fraktalov dlya obnaruzheniya defektov rotornykh uzlov podvizhnogo sostava zheleznodorozhno-go transporta / V. I. Shedrin // Tez. dokl. nauch.-tehn. konf. – Samara, 2005.
8. Antipenskij R. Razrabotka modelej pervichnykh signalov v programnoj srede MathCAD / R. Antipenskij // Komponenty i tehnologii. – 2007. – № 3. – ISSN 2079-6811.
9. Reshenie inzhenernykh zadach v pakete MathCAD / [Yu.E. Voskobojnikov i dr. ; pod red. Yu.E. Voskobojnikova]. – Novosibirsk : NGASU(Sibstrin), 2013. – 120 s.

Рецензія/Peer review : 26.5.2020 р.

Надрукована/Printed : 16.6.2020 р.

Стаття рецензована редакційною колегією