

А.О. СЯСЬКИЙ, Н.В. ШЕВЦОВА
Рівненський державний гуманітарний університет
О.Ю. ДЕЙНЕКА

Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне

МІЖФАЗНИЙ РОЗРІЗ В ІЗОТРОПНІЙ ПЛАСТИНЦІ З КРИВОЛІНІЙНИМ КОНТУРОМ, ПІДСИЛЕНИМ ЗАМКНЕНИМ ПРУЖНИМ РЕБРОМ

В умовах узагальненого плоского напруженого стану, створеного рівномірно розподіленими на нескінченності зусиллями, розглянуто мішану контактну задачу для нескінченної ізотропної пластинки з криволінійним отвором, контур якого підсилений замкненим пружним ребром, за наявності на межі поділу матеріалів пластинки і ребра симетричного міжфазного розрізу нульової ширини. Пластинка і пружне ребро мають спільну серединну площину. Моделюючи підсилювальне ребро криволінійним стрижнем сталого прямокутного поперечного перерізу, серединна поверхня якого не співпадає з поверхнею отвору, а сполучення пластинки і ребра – ідеальним механічним контактом, побудовано систему сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь для визначення контактних зусиль між пластинкою і ребром та внутрішніх сил і моментів у ребрі. Для розрахунку початкових параметрів у статично невизначеному підсилювальному ребрі використано умови однозначності зміщення точок його осі і кутів повороту поперечних перерізів. Встановлено структуру шуканих функцій на кінцях ділянки сполучення пластинки і ребра. Наближений розв'язок задачі побудовано методом механічних квадратур і колокації, яким досліджено вплив фізико-геометричних параметрів ребра і форми отвору на розподіл напружень в пластинці та підсилювальному ребрі. З'ясовано, що компоненти напружено деформованого стану в ребрі на кінцях ділянки сполучення приймають обмежені значення.

Ключові слова: міжфазний розріз, ізотропна пластинка, пружне ребро, поперечна і поздовжня сили, згинальний момент, сингулярні інтегральні рівняння, контактні зусилля.

A.O. SIASKYI, N.V. SHEVTSOVA
Rivne State University of Humanities, Ukraine
O.Y. DEJNEKA

National University of Water Management and Natural Resources, Rivne

INTERFACIAL INCISION IN ISOTROPIC PLATE WITH CURVILINEAR CONTOUR, REINFORCED BY A CLOSED RESILIENT RIB

In the conditions of generalized plane stressed state, created by forces evenly distributed at infinity, a mixed contact problem for an infinite isotropic plate with an curvilinear opening whose contour is reinforced by a closed resilient rib is considered in the presence on the boundary of the separation of a plate and rib the symmetric interfacial incision of the zero width. The plate and resilient rib have a common median plane. By modelling the reinforcing rib a curved rod of a constant rectangular cross-section, the middle surface of which does not coincide with the surface of the opening, and the combination of the plate and the rib - an ideal mechanical contact, the system of singular integral-differential equations for determining the contact forces between the plate and the rib and the internal forces and moments in the rib are constructed. The boundary conditions of the problem are formulated in the form of conditions for the joint deformation of the plate and the rib. To calculate the initial parameters in a statically undefined reinforcing rib, the conditions for the uniqueness of the displacement of the points of its axis and the angles of rotation of the cross sections are used. The structure of the searched functions at the ends of the connection area of the plate and the rib are established. The approximate solution of the problem was constructed by the method of mechanical quadratures and collocation, with which investigated the influence of the physico-geometric parameters of the rib and the shape of the opening on the distribution of stresses in the plate and the reinforcing rib. It was found out that the components of a tense deformed state in the rib at the ends of the junction area take limited values.

Keywords: interfacial incision, isotropic plate, resilient rib, transverse and longitudinal forces, bending moment, singular integral equations, contact efforts.

Вступ

Підвищення надійності деталей машин і споруд у вигляді пластин з криволінійними отворами, контури яких підсилені замкненими ребрами, є однією з ключових проблем сучасного машинобудування і будівництва. Їх довговічність значною мірою залежить від наявності на поверхні поділу матеріалів дефектів типу тріщин (розрізів нульової ширини). Такі дефекти можуть виникати на стадії виготовлення, або в процесі експлуатації, що призводить до суттєвого зниження допустимого граничного навантаження на деталь та росту тріщини і, як наслідок, до руйнування деталі.

На даний час у науковій літературі достатньо повно розроблені методи дослідження напруженого стану нескінченних ізотропних та анізотропних пластин з криволінійними отворами, контури яких підсилені замкненими ребрами жорсткості у вигляді пружної лінії або пружного стрижня. Використовуючи останню модель підсилювального ребра, в роботах [1–3] розглянуто низку задач про контактну взаємодію нескінченної ізотропної (ортотропної) пластинки з криволінійним отвором і замкненого пружного ребра, які перебувають в умовах узагальненого плоского напруженого стану, при їх сполученні з гарантованим натягом або методом зварювання.

За наявності міжфазного розрізу між пластинкою і підсилювальним ребром такі задачі досліджені недостатньо. Так, в роботах [4, 5] побудовано наближені розв'язки задачі для ізотропної та ортотропної

пластинки з круговим отвором, а в роботі [6] – ортотропної пластинки з еліптичним отвором. Випадки криволінійних отворів загального вигляду не розглядалися.

Пропонується наближений розв'язок задачі про часткове підсилення контуру криволінійного отвору в нескінченній ізотропній пластинці замкненим пружним ребром за наявності симетричного міжфазного розрізу, береги якого в процесі деформації не контактують.

Постановка задачі

Розглянемо нескінченну ізотропну пластинку товщиною $2h$ з криволінійним отвором, контур якого Γ підсилений ізотропним пружним ребром сталого прямокутного поперечного перерізу шириною 2η і товщиною $2h_0$. Розглянута конструкція перебуває в умовах узагальненого плоского напруженого стану, створеного рівномірно розподіленими взаємно перпендикулярними зусиллями p і q , що діють на нескінченності. Тому всі компоненти напруженого стану пластинки і ребра діють в їх спільній серединній площині, яка віднесена до системи декартових (x, y) і полярних (r, δ) координат з полюсом в центрі отвору. Системи відліку обираємо так, щоб вісь Ox співпадала з полярною віссю, віссю симетрії отвору і визначала один із напрямків силового навантаження на пластинку [6].

Припустимо, що зовні симетричної ділянки $[-\alpha_0^*, \alpha_0^*]$ (α_0^* – полярний кут) на лінії Γ сполучення пластинки і ребра виник міжфазний розріз нульової ширини, береги якого в процесі деформації не контактують.

Мета роботи – визначення компонент напруженого стану на контурі Γ в пластинці і підсилювальному ребрі та дослідження впливу на ці величини міжфазного розрізу, форми отвору і відносної жорсткості підсилення.

Основні рівняння задачі

Умовно розділимо двокомпонентну конструкцію на окремі елементи (нескінченна пластинка з криволінійним отвором і пружне підсилювальне ребро), замінюючи дію одного тіла на інше невідомими контактними зусиллями.

Нескінченна ізотропна пластинка перебуває у рівновазі під дією навантаження на нескінченності і нормальних T_p та дотичних $S_{p\lambda}$ контактних зусиль, що передаються до контуру Γ від підсилювального ребра.

Нехай форма криволінійного отвору в пластинці визначається функцією [7]

$$z = x + iy = \omega(\zeta) = R_0 \left(\zeta + \frac{\varepsilon_1}{\zeta} + \frac{\varepsilon_2}{\zeta^2} \right), \quad (1)$$

що реалізує конформне відображення зовнішності одиничного кола в площині $\zeta = \tilde{r}e^{i\lambda}$ на область, яку займає серединна площина пластинки. Тут $R_0 = 1$ – характерний розмір отвору; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – параметри, що характеризують відхилення форми контуру Γ від кола; (\tilde{r}, λ) – полярні координати точок в площині ζ ; $i = \sqrt{-1}$. За умови $|\varepsilon_1| + 2|\varepsilon_2| < 1$ функція (1) визначає контур Γ як комбінацію кола, еліпса і правильного трикутника із закругленими кутами.

При заданому навантаженні на пластинку параметри деформації контуру Γ (ε_λ – відносне видовження, V – кут повороту нормалі) визначаються за формулами [8]

$$\varepsilon_\lambda = \frac{1}{2Eh(\alpha^2 + \beta^2)} \left[(1-\nu)(\alpha^2 + \beta^2)T_p(\lambda) + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} [\Phi_1(\lambda, t)T_p(t) + \Phi_2(\lambda, t)S_{p\lambda}(t)] dt + \alpha(\lambda)\tilde{\varepsilon}_\lambda^0 + \beta(\lambda)\tilde{V}^0 \right];$$

$$V = \frac{1}{2Eh(\alpha^2 + \beta^2)} \left[(1-\nu)(\alpha^2 + \beta^2)S_{p\lambda}(\lambda) + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} [\Phi_1(\lambda, t)S_{p\lambda}(t) - \Phi_2(\lambda, t)T_p(t)] dt + \alpha(\lambda)\tilde{V}^0 - \beta(\lambda)\tilde{\varepsilon}_\lambda^0 \right], \quad (2)$$

в яких введено позначення

$$\Phi_1(\lambda, t) = -G(\lambda, t) + H(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2}; \quad \Phi_2(\lambda, t) = H(\lambda, t) + G(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2};$$

$$G(\lambda, t) = \alpha(\lambda)\alpha(t) + \beta(\lambda)\beta(t); \quad H(\lambda, t) = \alpha(\lambda)\beta(t) - \beta(\lambda)\alpha(t); \quad \alpha + i\beta = \omega'(\sigma); \quad \sigma = e^{i\lambda};$$

$$\tilde{\varepsilon}_\lambda^0 + i(\lambda)\tilde{V}^0 = 2(p-q)e^{-2i\lambda} + (p+q)[2 - \alpha(\lambda) - i\beta(\lambda)]; \quad (3)$$

E, ν – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки; $[-\alpha_0, \alpha_0]$ – образ ділянки $[-\alpha_0^*, \alpha_0^*]$ при відображенні (1).

Кільцеві зусилля T_λ на контурі Γ визначаються зі співвідношення [8]

$$T_\lambda = \nu T_p + 2Eh\varepsilon_\lambda. \quad (4)$$

Підсилювальне ребро моделюємо замкненим криволінійним стрижнем (кільцем) сталого прямокутного поперечного перерізу, який перебуває у рівновазі під дією контактних зусиль, що передаються до його зовнішньої бічної поверхні від пластинки. Задача розрахунку напруженого стану такого стрижня статично невизначена.

Умовно переріжемо стрижень площиною $\theta = -\pi$, а до торців перерізу прикладемо статично зрівноважені поздовжні сили N_0 і згинальні моменти L_b^0 . Оскільки задача симетрична відносно осі Ox , то поперечні сили відсутні ($Q_0 = 0$). У результаті цього одержимо статично визначений розімкнений стрижень, який перебуває у рівновазі під дією навантаження на його торцях і контактних зусиль (рис. 2) [6].

Компоненти напруженого стану стрижня надамо у вигляді [6]

$$N = -N_0 \cos \theta + \tilde{N}; \quad Q = -N_0 \sin \theta + \tilde{Q}; \quad L_b = L_b^0 + (x - x_0 - \eta(1 + \cos \theta))N_0 + \tilde{L}_b, \quad (5)$$

де N, Q, L_b – поздовжня і поперечна сили та згинальний момент, що виникають у поперечних перерізах і віднесені до його осі; $\tilde{N}, \tilde{Q}, \tilde{L}_b$ – відповідні складові компонент, викликані контактними зусиллями, причому $\tilde{N}(-\alpha_0) = \tilde{Q}(-\alpha_0) = \tilde{L}_b(-\alpha_0) = 0$; θ – кут нахилу нормалі в точці (x, y) контуру Γ до осі Ox ; $e^{i\theta} = e^{i\lambda} \omega'(\sigma) / |\omega'(\sigma)|$; $x_0 = x(-\pi)$.

Напружено-деформований стан розімкненого ребра опишемо основними рівняннями одновимірної теорії криволінійних стрижнів, побудованими з використанням гіпотези плоских перерізів [9, 10]:

- диференціальні рівняння рівноваги елемента стрижня при $\lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0]$

$$T_p = \frac{\tilde{N}(\lambda)}{\rho} - \frac{d\tilde{Q}(\lambda)}{ds}; \quad S_{p\lambda} = -\frac{\tilde{Q}(\lambda)}{\rho} - \frac{d\tilde{N}(\lambda)}{ds}; \quad \frac{d\tilde{L}_b(\lambda)}{ds} - \eta \frac{d\tilde{N}(\lambda)}{ds} - \tilde{Q}(\lambda) = 0, \quad (6)$$

в яких ρ – радіус кривини контуру Γ ;

- фізичні залежності між компонентами деформації і внутрішніми силами для зовнішнього поздовжнього волокна стрижня, яке контактує з пластинкою

$$\varepsilon_\lambda^{(c)} = \frac{1}{E_0 F_0} \left\{ \tilde{N}(\lambda) - N_0 \cos \theta + \frac{\eta + \eta_c}{\omega_0} \left(1 - \frac{\eta}{\rho} \right) \left[\tilde{L}_b(\lambda) + L_b^0 + (x - \eta \cos \theta - x_0 - \eta) N_0 \right] \right\}; \quad (7)$$

$$\frac{d\theta_b}{d\theta} = \frac{1}{E_0 F_0} \left\{ \tilde{N}(\lambda) - N_0 \cos \theta + \frac{\rho - \eta}{\omega_0} \left[\tilde{L}_b(\lambda) + L_b^0 + (x - \eta \cos \theta - x_0 - \eta) N_0 \right] \right\}, \quad \lambda \in [-\pi; \pi].$$

Тут введено позначення: $\varepsilon_\lambda^{(c)}, \theta_b$ – відносне видовження волокна і кут повороту нормалі до нього; $E_0 F_0$ – жорсткість стрижня на розтяг (стиск); $F_0 = 2h_0 \cdot 2\eta$ – площа поперечного перерізу; E_0 – модуль Юнга матеріалу стрижня; η_c – відстань від осі стрижня до нейтрального для чистого згину поздовжнього волокна; $\omega_0 = (\rho - \eta)\eta_c$; $\eta_c = \rho - \eta - 2\eta / \ln[\rho / (\rho - 2\eta)]$ [11].

- умови рівноваги підсилювального ребра як жорсткого цілого

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} (T_p(\lambda) + iS_{p\lambda}(\lambda)) e^{i\lambda} \omega'(\sigma) d\lambda = 0; \quad \tilde{L}_b(\alpha_0) - \eta \tilde{N}(\alpha_0) - \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \tilde{Q}(\lambda) |\omega'(\sigma)| d\lambda = 0, \quad (8)$$

які з урахуванням симетрії задачі відносно осі Ox і формул (5) можна перетворити до вигляду

$$\tilde{N}(\pm\alpha_0) = \tilde{Q}(\pm\alpha_0) = \tilde{L}_b(\pm\alpha_0) = 0. \quad (9)$$

Початкові параметри N_0, L_b^0 визначаються з умов однозначності зміщень точок осі стрижня та кута повороту нормалі його поперечного перерізу [6]

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left[(\rho \cos \theta - x) \frac{\tilde{N}(\lambda)}{\rho} + \left(1 - \frac{\eta}{\rho} \right) \left((\eta + \eta_c) \cos \theta - x \right) \frac{\tilde{L}_b(\lambda)}{\omega_0} \right] |\omega'(\sigma)| d\lambda +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} \left[(x - \rho \cos \theta) \frac{\cos \theta}{\rho} N_0 + \left(1 - \frac{\eta}{\rho} \right) \frac{(\eta + \eta_c) \cos \theta - x}{\omega_0} \left(L_b^0 + (x - x_0 - \eta(\cos \theta + 1)) N_0 \right) \right] |\omega'(\sigma)| d\lambda = 0;$$

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left[\frac{\tilde{N}(\lambda)}{\rho} + \left(1 - \frac{\eta}{\rho} \right) \frac{\tilde{L}_b(\lambda)}{\omega_0} \right] |\omega'(\sigma)| d\lambda + \frac{1}{\omega_0} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 - \frac{\eta}{\rho} \right) \left[L_b^0 + N_0 (x - (\eta + \eta_c) \cos \theta - x_0 - \eta) \right] |\omega'(\sigma)| d\lambda = 0. \quad (10)$$

Співвідношення (6), (7), (9), (10) визначають повну систему рівнянь для розрахунку напружено-деформованого стану замкненого підсилювального ребра.

Математична модель задачі

Крайові умови сполучення пластинки і підсилювального ребра формулюємо у вигляді умов їх сумісного деформування на ділянці сполучення

$$\varepsilon_\lambda = \varepsilon_\lambda^{(c)}; \quad V = \theta_b; \quad \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0]. \quad (11)$$

Підставляючи до них співвідношення (2), (7) одержимо після певних перетворень систему

сингулярних інтегральних рівнянь з ядрами Гільберта для визначення функцій T_ρ , $S_{\rho\lambda}$, \tilde{N} , \tilde{Q} , \tilde{L}_b і сталих N_0 , L_b^0 .

$$\begin{aligned} & \frac{E_0 F_0}{2Eh(\alpha^2 + \beta^2)} \left\{ (1-\nu)(\alpha^2 + \beta^2) T_\rho(\lambda) + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} [\Phi_1(\lambda, t) T_\rho(t) + \Phi_2(\lambda, t) S_{\rho\lambda}(t)] dt + \alpha(\lambda) \tilde{\epsilon}_\lambda^0 + \beta(\lambda) \tilde{V}^0 \right\} = \\ & = \tilde{N}(\lambda) - N_0 \cos \theta + \frac{\eta + \eta_c}{\omega_0} \left(1 - \frac{\eta}{\rho} \right) \left[\tilde{L}_b(\lambda) + L_b^0 + (x - \eta \cos \theta - x_0 - \eta) N_0 \right]; \\ & \frac{E_0 F_0}{2Eh(\alpha^2 + \beta^2)} \left\{ (1-\nu)(\alpha^2 + \beta^2) S_{\rho\lambda}(\lambda) + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} [\Phi_1(\lambda, t) S_{\rho\lambda}(t) - \Phi_2(\lambda, t) T_\rho(t)] + \alpha(\lambda) \tilde{V}^0 - \beta(\lambda) \tilde{\epsilon}_\lambda^0 \right\} dt = \\ & = \int_{-\pi}^{\lambda} \left[\tilde{N}(\lambda) - N_0 \cos \theta + \frac{\rho - \eta}{\omega_0} \left[\tilde{L}_b(\lambda) + L_b^0 + (x - \eta \cos \theta - x_0 - \eta) N_0 \right] \right] |\omega'(\sigma)| d\lambda. \end{aligned} \quad (12)$$

Її доповнюємо умовами зв'язку між функціями T_ρ , $S_{\rho\lambda}$ і \tilde{N} , \tilde{Q} , \tilde{L}_b (6) та співвідношеннями (10). Рівняння (6), (10), (12) визначають математичну модель задачі і слугують для визначення контактних зусиль між пластинкою і підсилювальним ребром та внутрішніх силових факторів у ребрі. Покладаючи в них $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$, одержимо відповідну модель для ізотропної пластинки з круговим отвором [4].

Наближений розв'язок задачі

Точний розв'язок системи (6), (10), (12) знайти не вдається. Для її наближеного розв'язання необхідно встановити структуру шуканих функцій на кінцях ділянки сполучення пластинки та ребра.

На підставі умов (9) можна зробити висновок, що функції \tilde{N} , \tilde{Q} і \tilde{L}_b обмежені і неперервні на проміжку $[-\alpha_0; \alpha_0]$, а на його кінцях дорівнюють нулю.

Оскільки розглядувана задача відноситься до мішаних контактних задач теорії пружності, то відповідно до [7], контактні зусилля T_ρ , $S_{\rho\lambda}$ на кінцях $\lambda = \pm\alpha_0$ мають кореневу особливість з локальною осциляцією. Нехтуючи її впливом, наближений розв'язок задачі можна побудувати комбінованим методом механічних квадратур і колокації [8, 12, 13], квадратурні формули якого наведені в роботах [13].

Якщо функції T_ρ , $S_{\rho\lambda}$ і \tilde{N} , \tilde{Q} , \tilde{L}_b і сталі N_0 , L_b^0 стануть відомі, то внутрішні зусилля і моменти в ребрі визначаються за формулами (5), а кільцеві зусилля T_λ на контурі Γ в пластинці – зі співвідношення (4).

Нормальні напруження в зовнішньому і внутрішньому поздовжніх волокнах ребра знаходимо за законом Гука [11]

$$\sigma^{(1)} = \frac{1}{F_0} \left[N + \frac{\eta + \eta_c}{\rho} \cdot \frac{\rho - \eta}{\omega_0} L_b \right]; \quad \sigma^{(2)} = \frac{1}{F_0} \left[N + \frac{\eta_c - \eta}{\rho - 2\eta} \cdot \frac{\rho - \eta}{\omega_0} L_b \right], \quad (13)$$

а найбільші дотичні напруження в осьовому волокні – за формулою Журавського [11] $\tau_{\max}^{(c)} = 1.5 \cdot Q / F_0$.

Для пластинки і підсилювального ребра з фізико-геометричними параметрами $\alpha_0 = 2\pi/3$; $h_0/h = 4/3$; $\eta/R_0 = 0.5$; $\nu = 0.3$; $\epsilon_1 = 0.1$; $\epsilon_2 = 0.1$ досліджено вплив на їх напружений стан відносної жорсткості підсилення E_0/E .

Результати числового розрахунку величин T_ρ , $S_{\rho\lambda}$, T_λ , $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$, τ_{\max} при $p = p$, $q = 0$ наведені на рис. 1–3. Суцільні лінії побудовано для випадку $E_0/E = 1$, штрихові – $E_0/E = 5$, штрих-пунктирні – $E_0/E = 10$. Пунктирна лінія відповідає випадку непідкріпленого контуру ($E_0/E = 0$).

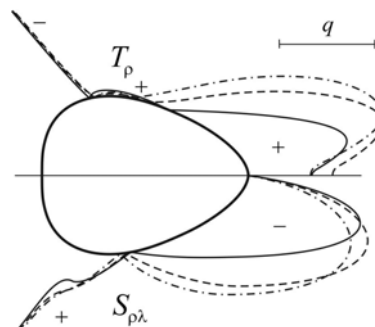


Рис. 1. Епюри розподілу контактних зусиль на контурі Γ в пластинці

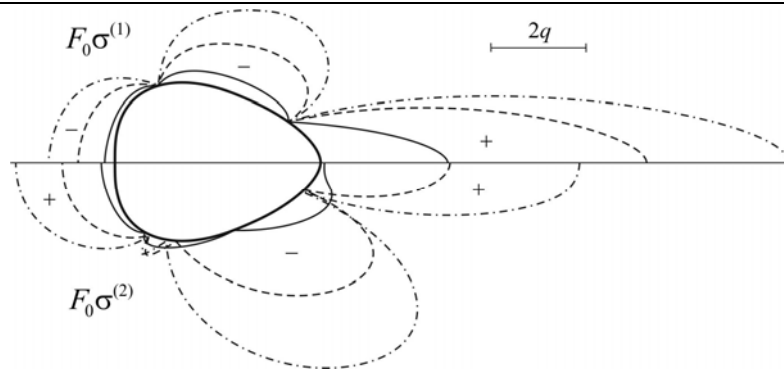


Рис. 2. Епюри розподілу нормальних напружень в крайніх волокнах підсилювального ребра

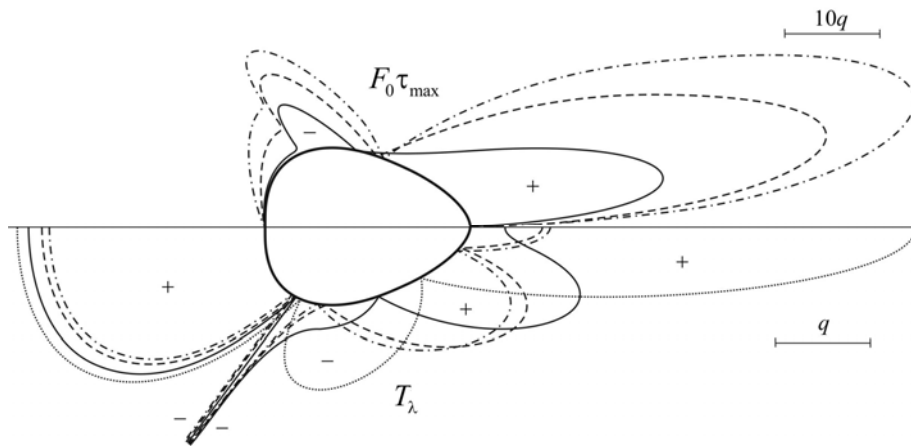


Рис. 3. Епюри розподілу максимальних дотичних напружень в осьовому волокну підсилювального ребра і кільцевих зусиль на контурі Γ в пластинці

Аналізуючи результати числового розрахунку, приходимо до таких висновків:

- наявність міжфазного розрізу між пластинкою і підсилювальним ребром призводить до суттєвої зміни всіх розрахункових величин;
- контактні зусилля в пластинці зростають при збільшенні E_0/E і приймають необмежені значення на кінцях ділянки її сполучення з ребром;
- наявність підсилювального ребра на ділянці з найбільшою кривиною різко зменшує на цій ділянці концентрацію кільцевих зусиль, залишаючи її практично незмінною на ділянці міжфазного розрізу;
- нормальні напруження в крайніх поздовжніх волокнах ребра залишаються обмеженими, набуваючи екстремальних значень, які зростають при збільшенні E_0/E , на ділянках з найбільшою та найменшою кривиною;
- поперечні сили не суттєво впливають на напружено деформований стан ребра і ними можна нехтувати в інженерних розрахунках.

Література

1. Мартынович Т.Л. Контактные взаимодействия пластин с упругими элементами / Т.Л. Мартынович, В.Е. Юринец. – Львов : Высшая школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1984. – 160 с.
2. Божидарнік В.В. Механіка руйнування, міцність і довговічність неперервно армованих композицій Т. 2. Математичні методи в задачах неперервно армованих композитів / В.В. Божидарнік, О.Є. Андрейків, Г.Т. Сулим. – Луцьк : Надстир'я, 2007. – 410 с.
3. Шереметьєв М.П. Пластинки с подкрепленным краем / М.П. Шереметьєв. – Львов : Изд-во Львовского университета, 1960. – 258 с.
4. Сяський А.О. Міжфазна тріщина в нескінченній ізотропній пластинці з підкріпленням круговим отвором / А.О. Сяський, Н.В. Шевцова, О.Ю. Дейнека // Вісник Національного університету водного господарства і природокористування. Серія «Технічні науки». – 2017. – Вип. 4 (80). – С. 168–176.
5. Сяський А.О. Міжфазний розріз в ортотропній пластинці з підсиленням круговим отвором / А.О. Сяський, Н.В. Шевцова, О.Ю. Дейнека // Вісник Хмельницького національного університету. – 2018. – № 5 (265). – С. 176–181.
6. Сяський А.О. Міжфазний розріз в ортотропній пластинці з еліптичним контуром, підсиленням замкненим пружним ребром / А.О. Сяський, Н.В. Шевцова, О.Ю. Дейнека // Вісник Хмельницького національного університету. – 2019. – № 1 (269). – С. 31–39.
7. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости /

Н.И. Мухелишвили. – Москва : Наука, 1966. – 708 с.

8. Батишкіна Ю.В. Часткове підкріплення криволінійних отворів в пластинках тонкими пружними стержнями змінної жорсткості / Ю.В. Батишкіна // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. – Львів, 2003. – С. 316–318.

9. Филин А.П. Алгоритмы построения разрешающих уравнений механики стержневых систем / А.П. Филин, О.Д. Тананайко, И.М. Чернева, М.А. Шварц. – Ленинград : Стройиздат, 1983. – 232 с.

10. Сяський А. Застосування методу сил для статичного розрахунку замкнених криволінійних стрижнів / А. Сяський, Н.Шевцова // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2015. – Т. 79, № 3. – С. 24–30.

11. Писаренко Г.С. Опір матеріалів / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Є.С. Уманський. – Київ : Вища школа, 2004. – 655 с.

12. Сяський А.А. Напряженное состояние кусочно-однородной пластинки с упругим включением / А.А. Сяський, В.А. Сяський // Прикладная механика. – 1983. – Т. 19, № 5. – С. 94–99.

13. Сяський А.А. Упругое равновесие пластинки с частично подкрепленным криволинейным отверстием / А.А. Сяський // Прикладная математика и механика. – 1986. – Т. 50, № 2. – С. 247–254.

References

1. Martynovich T.L. Kontaknyye vzaimodejstviya plastin s uprugimi elementami / T.L. Martynovich, V.E. Yurinec. – Lvov : Vysshaya shkola. Izd-vo pri Lvov. un-te, 1984. – 160 s.

2. Bozhydamnik V.V. Mekhanika ruinuvannya, mitsnist i dovhovichnist neperervno armovanykh kompozytsii T. 2. Matematychni metody v zadachakh neperervno armovanykh kompozytiv / V.V. Bozhydamnik, O.Ie. Andreikiv, H.T. Sulym. – Lutsk : Nadstyrnia, 2007. – 410 s.

3. Sheremetev M.P. Plastinki s podkreplennym kraem / M.P. Sheremetev. – Lvov : Izd-vo Lvovskogo universiteta, 1960. – 258 s.

4. Siaskyi A.O. Mizhfazna trishchyna v neskinchennii izotropnii plastyntsi z pidkriplenyim kruhovym otvorom / A.O. Siaskyi, N.V. Shevtsova, O.Iu. Deineka // Visnyk Natsionalnoho universytetu vodnoho hospodarstva i pryrodokorystuvannya. Seriya «Tekhnichni nauky». – 2017. – Vyp. 4 (80). – S. 168–176.

5. Siaskyi A.O. Mizhfaznyi rozriz v ortotropnii plastyntsi z pidsylenym kruhovym otvorom / A.O. Siaskyi, N.V. Shevtsova, O.Iu. Deineka // Herald of Khmelnytskyi National University. – 2018. – № 5 (265). – S. 176–181.

6. Siaskyi A.O. Mizhfaznyi rozriz v ortotropnii plastyntsi z eliptychnym konturom, pidsylenym zamknеныm pruzhnyim rebrom / A.O. Siaskyi, N.V. Shevtsova, O.Iu. Deineka // Herald of Khmelnytskyi National University. – 2019. – № 1 (269). – S. 31–39.

7. Mushelishvili N.I. Nekotorye osnovnyye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti / N.I. Mushelishvili. – Moskva : Nauka, 1966. – 708 s.

8. Batyshkina Yu.V. Chastkove pidkriplennia kryvoliniinykh otvoriv v plastyntskakh tonkymy pruzhnyimi stержniami zminnoi zhorstkosti / Yu.V. Batyshkina // Matematychni problemy mekhaniky neodnorodnykh struktur. – Lviv, 2003. – S. 316–318.

9. Filin A.P. Algoritmy postroeniya razreshayushih uravnenij mekhaniki stержnevyyh sistem / A.P. Filin, O.D. Tananajko, I.M. Cherneva, M.A. Shvarc. – Leningrad : Strojizdat, 1983. – 232 s.

10. Siaskyi A. Zastosuvannya metodu syl dlia statychnoho rozrakhunku zamknеныkh kryvoliniinykh stryzhniv / A. Siaskyi, N. Shevtsova // Visnyk Ternopilskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu. – 2015. – Т. 79, № 3. – С. 24–30.

11. Pysarenko H.S. Opir materialiv / H.S. Pysarenko, O.L. Kvitka, Ye.S. Umanskiy. – Kyiv : Vyshcha shkola, 2004. – 655 s.

12. Syaskij A.A. Napryazhennoe sostoyanie kusochno-odnorodnoj plastinki s uprugim vklyucheniem / A.A. Syaskij, V.A. Syaskij // Prikladnaya mehanika. – 1983. – Т. 19, № 5. – С. 94–99.

13. Syaskij A.A. Uprugoe ravновесие plastinki s chastichno podkreplennym krivolinejnym otverstiem / A.A. Syaskij // Prikladnaya matematika i mehanika. – 1986. – Т. 50, № 2. – С. 247–254.

Рецензія/Peer review : 26.5.2019 р.

Надрукована/Printed : 1.6.2019 р.

Рецензент: д.т.н., проф. Бомба А.Я.