DOI 10.31891/2307-5732-2020-289-5-296-301
УДК 51-7:664(045)

В.П. ХОРОЛЬСЬКИЙ, В.М. СЕРЕБРЕНИКОВ, Ю.М. КОРЕНЕЦЬ
Донецький національний університет економіки і торгівлі імені Михайла Туган-Барановського, м. Кривий Ріг

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЇ ПАСИВНОЇ ДОМІШКИ В РІДКОМУ СЕРЕДОВИЩІ ПІД ВПЛИВОМ УЛЬТРАЗВУКУ

У статті розглядається питання розробки математичної моделі процесу дифузії пасивної домішки в рідкому середовищі під впливом ультразвуку. При проходженні ультразвукової хвилі через рідке середовище відбувається явище акустичної кавітації. На відміну від гідродинамічної кавітації, вона виникає не локально, а за усім об'ємом рідини, оскільки викликається областями розрідження в ультразвуковій хвилі, тиск в яких нижчий за тиск насичених парів рідкого середовища. Наявність акустичної кавітації викликає труднощі математичного моделювання даного процесу. Як відомо, пасивна домішка в рідкому середовищі не впливає на гідродинаміку потоку і це дозволяє розглядати гідродинамічну задачу окремо від задачі масопереносу. Фізика процесу дифузії домішки в рідкому середовищі під впливом ультразвуку доволі складна, але якісно її можна представити у такий спосіб: під час акустичної кавітації за усім об'ємом відбуваються коливання та схлопування бульбашок, із-за цього в системі утворюються мікроскопічні кумулятивні струмені та ударні хвилі, що сприяє інтенсифікації перемішування домішки в рідкому середовищі. Необхідно відзначити, що таке перемішування відбувається локально, без наявності макроскопічної течії. Це наводить на аналогію з турбулентністю, де визначальними є пульсації та дрібні вихори. Отже, одним із підходів до моделювання такого локального перемішування в теорії турбулентності є гіпотеза Буссінеска. Проте гіпотеза Буссінеска з теорії турбулентності дає можливість описати локальне перемішування, яке виникає при акустичній кавітації, за допомогою коефіцієнта кавітаційної дифузії. Це обумовило можливість застосування методів математичної фізики для моделювання процесу дифузії пасивної домішки в рідкому середовищі під впливом ультразвуку. У процесі дослідження було обґрунтовано доцільність побудови математичної моделі у вигляді диференціального рівняння в приватних похідних другого порядку параболічного типу з граничними умовами другого типу.

Ключові слова: математичне моделювання, дифузія, пасивна домішка, рідке середовище, ультразвук.

V. KHOROLSKY, V. SEREBRENIKOV, Yu. KORENETS
Donetsk National University of Economy and Trade named after Mikhailo Tugan-Baranovsky, Kryvyi Rih

MATHEMATICAL MODELLING OF PASSIVE IMPURITY DIFFUSION IN A LIQUID MEDIUM UNDER THE INFLUENCE OF ULTRASOUND

The article considers the question of developing a mathematical model of the process of diffusion of passive impurities in a liquid medium under the influence of ultrasound. When an ultrasonic wave passes through a liquid medium, the phenomenon of acoustic cavitation occurs. Unlike hydrodynamic cavitation, it does not occur locally, but throughout the volume of the liquid, because it is caused by rarefaction regions in the field of ultrasonic vibrations, the pressure of which is lower than the saturated vapour pressure of the liquid medium. The presence of acoustic cavitation causes difficulties in mathematical modelling of this process. As is known, the passive impurity in a liquid medium does not affect the hydrodynamics of the flow and this allows us to consider the hydrodynamic problem separately from the problem of mass transfer. The physics of the process of diffusion of impurities in a liquid medium under the influence of ultrasound is quite complex, but qualitatively it can be represented as follows: during acoustic cavitation throughout the volume there are oscillations and collapse of bubbles, due to this microscopic cumulative jets and shock waves are formed. intensification of impurity stirring in a liquid medium. It should be noted that such mixing occurs locally, without the presence of macroscopic flow. This is analogous to turbulence, where pulsations and small vortices are decisive. Thus, one of the approaches to modelling such local mixing in turbulence theory is the Boussinesq hypothesis. However, Boussinesq's hypothesis on the theory of turbulence makes it possible to describe the local mixing that occurs during acoustic cavitation using the cavitation diffusion coefficient. This made it possible to use the methods of mathematical physics to model the process of diffusion of passive impurities in a liquid medium under the influence of ultrasound. In the course of the research, the expediency of constructing a mathematical model in the form of a differential equation in partial derivatives of the second order of the parabolic type with boundary conditions of the second type was substantiated.

Key words: mathematical modelling, diffusion, passive impurity, liquid medium, ultrasound.

Постановка задачі

Розглядається задача дифузії пасивної домішки в рідкому середовищі, через яку пропускається ультразвук. При проходженні ультразвукової хвилі через рідке середовище спостерігається акустична кавітація [1]. На відміну від другого відомого типу кавітації – гідродинамічної, вона виникає не локально, в місці найбільшої швидкості та найменшого тиску на поверхні обтічного тіла, а за усім об'ємом. Викликана акустична кавітація областями розрідження в ультразвуковій хвилі, тиск в яких нижче тиску насичених парів рідкого середовища.

Як відомо, пасивна домішка в рідкому середовищі не впливає на гідродинаміку потоку [2]. Це дозволяє розглядати гідродинамічну задачу окремо від завдання масопереносу, що істотно спрощує вивчення процесу.

Аналіз досліджень та публікацій

Фізика процесу дифузії домішки в рідкому середовищі під впливом ультразвуку досить складна, але якісно її можна представити у такий спосіб. При акустичній кавітації за усім об'ємом відбуваються коливання і схлопування бульбашок. При схлопуванні утворюються мікроскопічні кумулятивні струмені та ударні хвилі. Це сприяє інтенсифікації перемішування домішки в середовищі [3].

Необхідно відзначити, що таке перемішування відбувається локально, без наявності макроскопічної течії. Це наводить на аналогію з турбулентністю, де визначальними є пульсації і дрібні вихори [4].

Одним з підходів до моделювання такого локального перемішування в теорії турбулентності є гіпотеза Буссінеска [5]. Відповідно до цієї гіпотези, процес може бути описаний введенням коефіцієнта турбулентної дифузії. Він на кілька порядків перевищує коефіцієнт молекулярної дифузії, що свідчить про високу інтенсивність турбулентного масообміну.

У даній роботі прийнято, відповідно до гіпотези Буссінеска в теорії турбулентності, що локальне перемішування при акустичній кавітації моделюється за допомогою коефіцієнта кавітаційної дифузії.

Далі, в [6] було відзначено, що інтенсивність ультразвукової хвилі при її поширенні в середовищі, убуває за експоненціальним законом. Таким чином, має місце аналог закону Бугера-Ламберта-Бера, відомого з оптики [7].

Формулювання цілей

Метою статті є побудова зручної та об’єктивної математичної моделі процесу дифузії пасивної домішки в рідкому середовищі під дією ультразвуку для подальшого використання в розробці інтелектуальних систем моніторингу та управління подібними технологічними процесами харчових виробництв, зокрема, хлібопекарської галузі та вирішенні інших наукових та інженерних завдань.

Виклад основного матеріалу дослідження

Припустимо, що коефіцієнт кавітації дифузії пропорційний інтенсивності ультразвуку. Тоді його залежність від пройденого ультразвуковою хвилею шляху, згідно з припущенням про експоненційний закон загасання, має вигляд:

$$D = D_0 \exp(-kx), \tag{1}$$

де D – коефіцієнт кавітації дифузії, м^2/с;

D_0 – коефіцієнт кавітації дифузії на вході в середу, м^2/с;

k – коефіцієнт поглинання ультразвуку рідким середовищем, 1/м;

x – координата, спрямована в бік поширення ультразвукової хвилі, м, (початок координат розташовано на вході до середовища).

Оскільки рідке середовище з домішкою макроскопічно нерухоме, еволюція в часі концентрації домішки з урахуванням (1) описується лінійним диференціальним рівнянням в приватних похідних другого порядку параболічного типу [8]:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial c}{\partial x}\right) = D_0\frac{\partial}{\partial x}\left(\exp(-kx)\frac{\partial c}{\partial x}\right), \tag{2}$$

де c – концентрація домішки у середовищі, кг/м;

t – час, с.

Для зручності рішення і подальшого дослідження доцільно привести рівняння (2) до безрозмірного вигляду, скориставшись теорією подібності та розмірностей [9]. З цією метою введемо безрозмірні змінні

$$\xi = k \cdot x \,, \tau = t \cdot D_0 \cdot k^2. \tag{3}$$

Мінлива ξ визначає безрозмірну відстань, пов'язану з величиною коефіцієнта поглинання ультразвуку рідким середовищем k. У свою чергу, змінна τ визначає безрозмірний час протікання поглинання ультразвуку рідким середовищем, пов'язаний як з початковим значенням коефіцієнта кавітаційної дифузії D_0, так і з коефіцієнтом поглинання ультразвуку рідким середовищем k.

З урахуванням заміни (3) диференційне рівняння (2) в безрозмірному вигляді запишеться так:

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(exp(-\xi)\frac{\partial c}{\partial \xi}\right). \tag{4}$$

Важливо підкреслити ще одну особливість рівняння (4). Перехід до безрозмірного вигляду опису процесу, що моделюється, дає можливість зменшити кількість незалежних параметрів, перетворивши їх у комплекси, представлені у вигляді множень. Так, в даному випадку концентрація, що моделюється, залежить від чотирьох параметрів (x, t, k, D_0). У безрозмірному вигляді ця залежність визначається тільки двома параметрами ξ і τ. Природно, що дослідження концентрації від двох параметрів є значно простішим. Крім того, як зазначено в [10], задаючи безрозмірним параметрам певні величини, можна отримати нескінчене число значень розмірних величин відповідно до формул (3).

Розглянемо постановку крайової задачі. Приймаємо, що ультразвукова хвиля проходить крізь шар рідкого середовища завтовшки l. Координати меж середовища: $x = 0$ та $x = l$. На межах середовища повинні виконуватися нульові граничні умови другого роду для потоку домішки [11]:

$$\frac{\partial c}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial c}{\partial x}(l,t) = 0,$$

або в безрозмірному вигляді:

$$\frac{\partial c}{\partial \xi}(0,\tau) = \frac{\partial c}{\partial \xi}(\xi_0,\tau) = 0, \tag{5}$$

де $\xi_0 = k \cdot l.$

Початкову умову для задачі, що розглядається, запишемо у вигляді:

$$c(x,0) = a \cdot \varphi(x)\,, \tag{6}$$

де $a -$ постійна.

Для знаходження постійної a скористуємося тим, що в шарі рідкого середовища, що розглядається, знаходиться задана кількість домішки. Ця умов записується у вигляді:

$$\int_0^l c(x,0)dx = m, \tag{7}$$

де m - задана кількість домішки, кг.

Беручи до уваги (6), умова (7) запишеться у вигляді:

$$a \cdot \int_0^l \varphi(x)dx = m. \tag{8}$$

Тоді, відповідно (8), знаходимо:

$$a = \frac{m}{\int_0^l \varphi(x)dx}. \tag{9}$$

У результаті початкова умова (6) з урахуванням (9) запишеться так:

$$c(x,0) = \frac{m}{\int_0^l \varphi(x)dx}\,\varphi(x). \qquad 10)$$

Така початкова умова визначає нерівномірний розподіл концентрації домішки в початковий момент часу.

У безрозмірному вигляді початкова умова (10) приймає вигляд:

$$c(\xi,0) = \frac{m \cdot k}{\int_0^{\xi_0} \varphi_1(\xi)d\xi}\,\varphi_1(\xi), \tag{11}$$

де $\varphi_1(\xi)$ – запис функції $\varphi_1(x)$ в безрозмірному вигляді.

З огляду на запис початкового умови (11), природно перейти до безрозмірної величини концентрації домішки в рідкому середовищі, відповідно до рівняння:

$$\hat{c}(\xi,\tau) = \frac{c(\xi,\tau)}{m \cdot k} \int_0^{\xi_0} \varphi_1(\xi)d\xi. \tag{12}$$

З огляду на (4), (5), (11) і (12), загальна постановка задачі математичного моделювання дифузії пасивної домішки в рідкому середовищі під впливом ультразвуку в безрозмірному вигляді набуває вигляду:

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(exp(-\xi)\,\frac{\partial \hat{c}}{\partial \xi}\right), \tag{13}$$

$$\hat{c}(\xi,0) = \varphi_1(\xi), \tag{14}$$

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial \xi}(0,\tau) = 0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial \xi}(\xi_0,\tau) = 0. \tag{16}$$

Залежність коефіцієнта кавітаційної дифузії від просторової координати ускладнює рішення завдання (13), ..., (16). У свою чергу, для конкретного рішення задачі (13), ..., (16) необхідно задати функцію, яка визначатиме початковий розподіл домішки в рідкому середовищі.

Згідно до змісту задачі, що вирішується, необхідно вибрати таку початкову умову (6), щоб потік домішки на кордонах шару дорівнював нулю. Ця умова може бути вибрана, наприклад, такою:

$$c(x,0) = a \cdot x^2(x-l)^2. \tag{17}$$

Початкова умова (17) визначає нерівномірний розподіл концентрації домішки (згусток посередині шару) в початковий момент часу.

У свою чергу, згідно з (8), має місце:

$$a \cdot \int_0^l x^2(x-l)^2 dx = m. \tag{18}$$

Інтегруючи у (18), знаходимо:

$$a \cdot \frac{l^5}{30} = m. \tag{19}$$

Із (19) знаходимо:

$$a = \frac{30m}{l^5}. \tag{20}$$

У свою чергу, початкова умова (17) в безрозмірному вигляді запишеться так:

$$c(\xi,0) = \frac{30m}{l^5k^4}\xi^2(\xi-\xi_0)^2,$$

або

$$\hat{c}(\xi,0) = \xi^2(\xi-\xi_0)^2, \tag{21}$$

де $\hat{c}(\xi,0) = c(\xi,0)\frac{l^5k^4}{30m}$.

Таким чином, з урахуванням початкового розподілу концентрації домішки (21) в рідкому середовищі може бути знайдене конкретне рішення даної задачі (13), (15) і (16).

Разом з тим, вважаємо за доцільне оцінити асимптотичну величину концентрації домішки в рідкому середовищі, яка настане при стаціонарному перебігу процесу дифузії. Для цього у формулі (13) достатньо прирівняти нулю швидкість протікання дифузії. В результаті отримаємо звичайне диференціальне рівняння [12]:

$$\frac{d}{d\xi}\left(exp(-\xi)\frac{d\hat{c}}{d\xi}\right) = 0. \tag{22}$$

Рішення рівняння (22) вдається шляхом послідовного інтегрування. На першому кроці інтегрування отримуємо:

$$\frac{\exp(-\xi)\,(d\widehat{c})}{d\xi} = A, \tag{23}$$

де A - довільна постійна.

На другому кроці послідовно отримуємо:

$$\frac{d\hat{c}}{d\xi} = A\cdot exp(\xi)$$
$$\int d\hat{c} = A\cdot\int exp(\xi)d\xi$$
$$\hat{c} = A\cdot exp(\xi) + B, \tag{24}$$

де B - довільна постійна.

Для знаходження довільних постійних скористаємося граничними умовами (15) і (16). Послідовно знаходимо:

$$\widehat{c}' = A\cdot exp(\xi),\ \ \widehat{c}'(0) = A\cdot exp(0) = 0,\quad A = 0. \tag{25}$$

Друга гранична умова не дозволяє знайти другу постійну. Таким чином, стаціонарне рішення має вигляд:

$$\hat{c}_s = B. \tag{26}$$

Відповідно до рівності (26) можна зробити попередній висновок, що в стаціонарному стані концентрація домішок в рідкому середовищі буде постійною. Для знаходження цієї величини концентрації скористаємося тим, що в процесі дифузії домішки в рідкому середовищі загальна маса домішки залишається постійною.

Користуючись початковою умовою (14), знаходимо загальну масу домішки в безрозмірному вигляді:

$$\int_0^{\xi_0}\varphi_1(\xi)d\xi. \tag{27}$$

Тоді, враховуючи (26) и (27), згідно збереженню маси домішки в рідкому середовищі, можна записати:

$$\int_0^{\xi_0}\varphi_1(\xi)d\xi = \hat{c}_s\cdot\xi_0. \tag{28}$$

З рівності (28) знаходимо величину стаціонарної концентрації домішки в рідкому середовищі, яку шукаємо:

$$\hat{c}_s = \frac{1}{\xi_0}\int_0^{\xi_0}\varphi_1(\xi)\,d\xi. \tag{29}$$

Для отримання конкретних результатів скористаємося початковим розподілом концентрації (21). Враховуючи що

$$\int_0^{\xi_0}\xi^2(\xi-\xi_0)^2d\xi = \frac{\xi_0^5}{30},$$

знаходимо, відповідно (28), величину стаціонарної концентрації домішки в рідкому середовищі, яку шукаємо:

$$\hat{c}_s = \frac{\xi_0^4}{30}. \quad (30)$$

На рис. 1 показані графіки початкової та стаціонарної концентрацій домішки в рідкому середовищі.

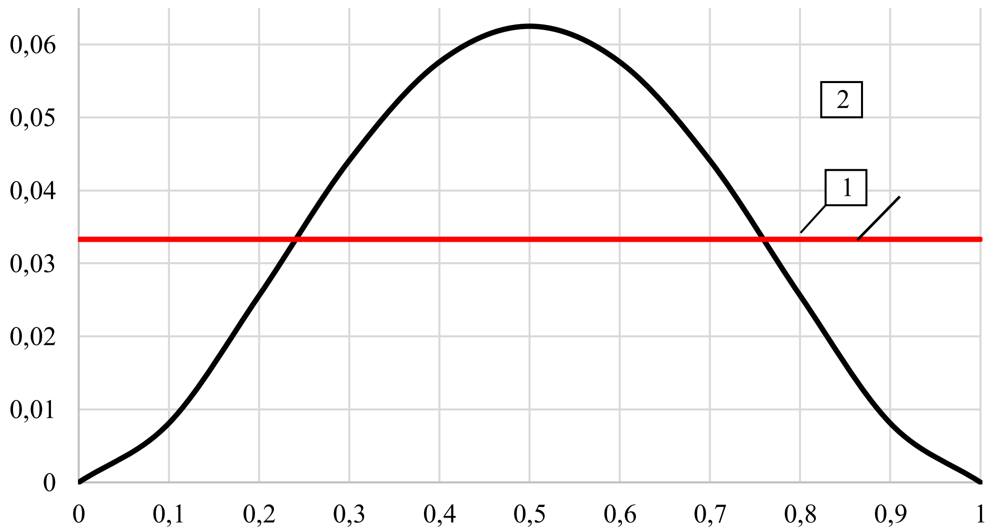

Рис. 1. Розподіл концентрації домішки в рідкому середовищі (ξ_0 = 1)
(1 – початковий розподіл концентрації домішки в рідкому середовищі;
2 – стаціонарний розподіл концентрації домішки в рідкому середовищі)

Висновки

Аналіз процесу дифузії пасивної домішки в рідкому середовищі під впливом ультразвуку показав його виняткову складність, обумовлену, зокрема, наявністю акустичної кавітації. Це дозволяє зробити висновок про трудності математичного моделювання даного процесу.

Гіпотеза Буссінеска з теорії турбулентності дала можливість описати локальне перемішування при акустичної кавітації за допомогою коефіцієнта кавітаційної дифузії, що вказало на можливість застосування методів математичної фізики для моделювання процесу дифузії пасивної домішки в рідкому середовищі під впливом ультразвуку.

Зазначено на доцільність побудови математичної моделі у вигляді диференціального рівняння в приватних похідних другого порядку параболічного типу з граничними умовами другого типу.

Література

1. Сиротюк М. Г. Акустическая кавитация / М. Г. Сиротюк – М. : Наука, 2008. – 271 с.
2. Монин А. С. Статистическая гидромеханика. Ч. 1 / А. С. Монин, А. М. Яглом – М. : Наука, 1965. – 641 с.
3. Флинн Г. Физика акустической кавитации в жидкостях / Г. Флинн ; [пер. с англ.]. – М. : Мир, 1967. – Т. 1. – 138 с.
4. Ландау Л. Д, Лифшиц Е. М. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. : Наука, 1986. – 736 с.
5. Алексин В. А. Математические модели турбулентных течений : учебное пособие / В. А. Алексин. – М. : МГИУ, 2008. – 54 с.
6. Дейниченко Г. В. Теоретичне та експериментальне визначення раціональної тривалості ультразвукової обробки для отримання водно-жирових емульсій / Г. В. Дейниченко, Г. М. Постнов, В. М. Червоний, В. О. Старков // Праці ТДАТУ, вип.17, Т. 1. – Мелітополь : ТДАТУ, 2017.– С. 34–40.
7. Ландсберг Г. С. Оптика / Г. С. Ландсберг. – 6-е изд., стереот. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 848 с.
8. Мартинсон Л. К. Дифференциальные уравнения математической физики / Л. К. Мартинсон, Ю. И. Малов. – М. : МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2002. – 368 с.
9. Гухман А. А. Введение в теорию подобия / А. А. Гухман. – М. : Высшая школа, 1973. – 296 с.
10. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике / Л. И. Седов. – М. : Наука, 1987. – 423 с.
11. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1981. – 512 с.
12. Филиппов А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений / А. Ф. Филиппов. – Изд. 2-е. – М. : Наука, 2007. – 240 с.
13. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Метод разделения переменных в математической физике / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. – СПб, 2009. – 92 с.

14. Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. – М. : Наука, 1988. – 159 с.

15. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики : учебное пособие / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – 6-е изд., испр. и доп. – М. : Изд-во МГУ, 1999. – 798 с.

16. Васильев А. Excel 2010 на примерах / А. Васильев. – М. : БХВ – Петербург, 2010. – 432 с.

17. Карманов В. П. Математическое программирование / В. П. Карманов. – М. : Наука, 1986. – 286 с.

References

1. Sirotyuk M. G. Akusticheskaya kavitaciya / M. G. Sirotyuk – M. : Nauka, 2008. – 271 s.

2. Monin A. S. Statisticheskaya gidromehanika. Ch. 1 / A. S. Monin, A. M. Yaglom – M. : Nauka, 1965. – 641 s.

3. Flinn G. Fizika akusticheskoj kavitacii v zhidkostyah / G. Flinn ; [per. s angl.]. – M. : Mir, 1967. – T. 1. – 138 s.

4. Landau L. D, Lifshic E. M. Gidrodinamika / L.D. Landau, E.M. Lifshic. – M. : Nauka, 1986. – 736 s.

5. Aleksin V. A. Matematicheskie modeli turbulentnyh techenij : uchebnoe posobie / V. A. Aleksin. – M. : MGIU, 2008. – 54 s.

6. Deinychenko H. V. Teoretychne ta eksperymentalne vyznachennia ratsionalnoi tryvalosti ultrazvukovoi obrobky dlia otrymannia vodno-zhyrovykh emulsii / H. V. Deinychenko, H. M. Postnov, V. M. Chervonyi, V. O. Starkov // Pratsi TDATU, vyp.17, T. 1. – Melitopol : TDATU, 2017.– S. 34–40.

7. Landsberg G. S. Optika / G. S. Landsberg. – 6-e izd., stereot. – M. : FIZMATLIT, 2003. – 848 s.

8. Martinson L. K. Differencialnye uravneniya matematicheskoj fiziki / L. K. Martinson, Yu. I. Malov. – M. : MGTU imeni N.E. Baumana, 2002. – 368 s.

9. Guhman A. A. Vvedenie v teoriyu podobiya / A. A. Guhman. – M. : Vysshaya shkola, 1973. – 296 s.

10. Sedov L. I. Metody podobiya i razmernosti v mehanike / L. I. Sedov. – M. : Nauka, 1987. – 423 s.

11. Vladimirov V. S. Uravneniya matematicheskoj fiziki / V. S. Vladimirov. – M. : Nauka, 1981. – 512 s.

12. Filippov A. F. Vvedenie v teoriyu differencialnyh uravnenij / A. F. Filippov. – Izd. 2-e. – M. : Nauka, 2007. – 240 s.

13. Zajcev V. F., Polyanin A. D. Metod razdeleniya peremennyh v matematicheskoj fizike / V. F. Zajcev, A. D. Polyanin. – SPb, 2009. – 92 s.

14. Kompyutery, modeli, vychislitelnyj eksperiment. – M. : Nauka, 1988. – 159 s.

15. Tihonov A. N. Uravneniya matematicheskoj fiziki : uchebnoe posobie / A. N. Tihonov, A. A. Samarskij. – 6-e izd., ispr. i dop. – M. : Izd-vo MGU, 1999. – 798 s.

16. Vasilev A. Excel 2010 na primerah / A. Vasilev. – M. : BHV – Peterburg, 2010. – 432 c.

17. Karmanov V. P. Matematicheskoe programmirovanie / V. P. Karmanov. – M. : Nauka, 1986. – 286 s.

Надійшла / Paper received : 05.10.2020 Надрукована/Printed :27.11.2020