

ДРАЧ І. В.

Хмельницький національний університет
ORCID ID: 0000-0000-0000-0000
e-mail: cogitare410@gmail.com

УЗАГАЛЬНЕНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ КОЛИВАНЬ РОТОРНОЇ СИСТЕМИ З ВЕРТИКАЛЬНОЮ ВІССЮ ОБЕРТАННЯ

У роботі наведено результати моделювання коливань роторної системи. Для випадку вертикальної роторної системи складені лінійні диференціальні рівняння малих коливань, в яких відображені особливості підвіски роторної машини. На основі аналізу одержаних рівнянь сформульовані шляхи вдосконалення конструкцій експериментальної установки, що моделює роторну систему на пружних опорах з вертикальною віссю обертання, для зменшення її віброактивності.

Ключові слова: роторна система, просторові та кількісні характеристики інерційних, масових, жорсткісних, демпферних чинників, динамічна модель коливань, віброактивність.

ILONA DRACH
Khmelnytskyi National University

GENERALIZED MATHEMATICAL MODEL OF VIBRATIONS OF A VERTICAL AXIS ROTARY SYSTEM

The rotor's response to dynamic actions depends on its physical parameters and the parameters of the supporting structure. The vibration measured on the bearings or on the rotor shaft, in addition to the physical properties of the rotor, also depends on the value of the unbalance, its distribution along the rotor axis, as well as on the rotational speed. These factors influence the choice of the balancing method. This article proposes a dynamic model of a rotary machine with a vertical axis of rotation and six degrees of freedom. Differential equations of free and forced oscillations of the rotor system are compiled. It is shown that when considering the general case of oscillations of the rotor system, there is a high connectivity of oscillations along all generalized coordinates. Based on the analysis of differential equations, ways of reducing vibration activity and connectivity of machine vibrations are shown, which provide for: reduction of the center of mass of the platform to the axis of rotation of the rotor; alignment of the center of stiffness of the elastic support system with the center of gravity of the platform, and the main axes of stiffness and constant viscous friction of dampers with the main central axes of inertia of the platform; the use of vertical suspensions for the oscillating system in the construction of the machine; replacement of the elastic sealing diaphragm of the rotor with a non-rigid one. The above measures to reduce the connectivity of vibrations and vibration activity do not completely eliminate the vibrations of the machine caused by stochastic, variable imbalances. Therefore, a further decrease in the vibration activity of the machine can be associated with the use of auto-ballasting devices, which make it possible to reduce the disturbing forces by reducing the magnitude of the stochastic imbalances of the rotary machine.

Keywords: rotor, mass, inertial, rigid, damping factors of vibroactivity, mathematical modeling, dynamic model of oscillations.

Постановка проблеми

Реакція ротора на динамічні впливи залежить від його фізичних властивостей і властивостей опорної конструкції. Вібрація, що вимірюється на опорах або на валу ротора, крім фізичних властивостей ротора, залежить також від значення дисбалансу, його розподілу вздовж осі ротора, а також від частоти обертання [1]. Вказані чинники впливають на вибір методу балансування.

Аналіз останніх джерел

Розв'язання завдань, пов'язаних із проблемами зниження роторної вібрації, ґрунтується на базі лінійної теорії механічних коливань. Теорія показує і основні напрями боротьби з вібрацією: віброізоляція [2]; демпфування [3]; динамічне гасіння коливань [4]; вдосконалення методів балансування роторів [5], у тому числі і з урахуванням їх гнучкості [6]. У багатьох сучасних роботах досліджуються електромагнітні балансувальні пристрої у вигляді електромагнітних підшипників [7] і електромагнітних кілець [8].

Широкого застосування набули методи оптимального керування вібрацією [9]. Заслужують також на увагу методи демпфування пральних машин з використанням магніто- й електрореологічних рідин [10].

Незважаючи на те, що останнім часом дослідники досягли значних успіхів у створенні активних і пасивних методів і засобів зниження вібрацій роторних машин, рівень небажаних вібрацій може бути також знижений за рахунок оптимального компоновання складових конструкції машини.

У цій статті ґрунтуючись на дослідженнях рівнянь коливань вертикальної роторної системи визначимо основні вимоги до конструкцій роторних машин з низькою віброактивністю.

Виклад основного матеріалу

Основні припущення й обмеження. При розрахунках коливань використана динамічна модель (рис. 1), що є системою, ротор якої підвішений через довільну кількість пружних опор до корпусу. Коливальною вважатимемо систему платформа-ротор, що не деформується. Така коливальна система здатна здійснювати малі переміщення в довільному напрямку. А така динамічна модель є узагальненою моделлю коливань типової конструкції центрифуг, сепараторів, пральних машин та ін.

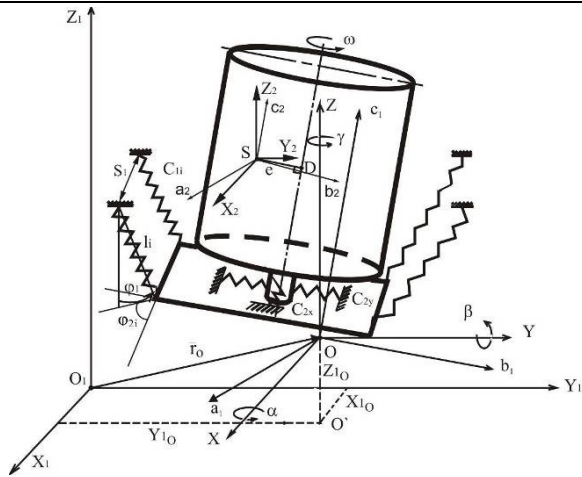


Рис. 1. Схема динамічної моделі роторної машини з вертикальною віссю обертання

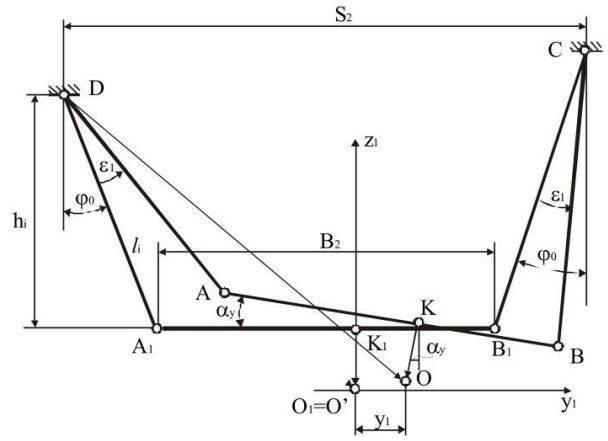


Рис. 2. Переміщення платформи за узагальненою координатою u_1

Для обраної розрахункової схеми діють такі припущення:

1. Пружні характеристики амортизаторів машини лінійні. При розгляді малих коливань в розрахунок береться невелика ділянка пружної характеристики опори, в межах якої викривлення характеристики незначні й її можна вважати лінійною.

2. Деформаціями платформи і ротора можна знехтувати тому, що їх жорсткості значно перевищують жорсткості пружних опор. Кріплення ротора до платформи абсолютно жорстке і забезпечує ротору тільки одну ступінь свободи щодо платформи – обертання навколо поздовжньої осі.

3. Розташування центру мас незрівноваженого ротора носить випадковий характер і в довільний момент часу визначається поточними координатами, щодо осі обертання в площині, перпендикулярній до неї. У початковому стані ротор ідеально збалансований.

З урахуванням прийнятих припущень динамічна модель машини є абсолютно твердим тілом, пружно з'єднаним з корпусом машини, яке здатне переміщатися в будь-якому напрямку і таким чином має шість ступенів свободи.

Диференціальні рівняння коливань системи платформа–ротор отримаємо, виходячи з рівнянь Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = 0, \tag{1}$$

де q_j – узагальнені координати, $j = \overline{1,6}$.

Для складання виразів для кінетичної й потенціальної енергій системи знаходимо переміщення й швидкості переміщення точок коливної системи.

Положення коливної системи у просторі визначимо декартовими координатами центру інерції платформи – a_1, b_1, c_1 і кутами – α, β, γ , які задають повороти осей координат, жорстко зв'язаних із платформою щодо нерухомих (зв'язаних з корпусом) осей координат. Для наочності центр мас платформи – точка O – винесений за межі платформи (рис. 1). Просторовий рух коливної системи подаємо як сукупність двох рухів – поступального разом із центром мас платформи й обертового навколо того самого центру.

Тоді рух коливної системи платформа–ротор розглядаємо як рух рухомої системи координат a_1, b_1, c_1 щодо нерухомої X_1, Y_1, Z_1 (рис. 1).

У початковому положенні при нерухомій платформі обидві ці координатні системи збігаються. Вважатимемо, що осі a_1, b_1, c_1 є головними центральними осями ротора. При цьому врахуємо, що в загальному випадку центр мас коливної системи може не лежати на осі обертання ротора.

Для окремого вивчення поступального й обертового руху коливної системи уведемо додаткову координатну систему X, Y, Z , що поступально рухається, із центром мас в точці O коливної системи і осі якої при русі завжди залишаються паралельними до відповідних нерухомих осей, тобто $X \parallel X_1, Y \parallel Y_1, Z \parallel Z_1$.

Положення рухомої системи a_1, b_1, c_1 щодо нерухомої X_1, Y_1, Z_1 визначимо координатами x_1, y_1, z_1 її полюса O і кутами α, β, γ [11] поворотів системи a_1, b_1, c_1 навколо осей X, Y, Z , що рухаються поступально.

Таким чином, узагальненими координатами вважатимемо координати x_1, y_1, z_1 точки O й кути поворотів α, β, γ системи a_1, b_1, c_1 .

Переміщення пружно підвішеної платформи роторної системи. В існуючих конструкціях роторних машин з вертикальною віссю обертання платформа підвіщується до корпусу за допомогою трьох або чотирьох підвісних елементів: підпружинених металевих стрижнів, пружин значної довжини або еластичних ременів [12].

Уведемо позначення: C_{l_i} – жорсткість пружини i -ї підвіски; C_{2x}, C_{2y}, C_{2z} – жорсткості ущільнювальної діафрагми в напрямку осей X, Y, Z ; l – довжина підвісного стрижня в початковому положенні за відсутності руху; φ_1, φ_{2i} – кути напрямних косинусів у системі координат X_1, Y_1, Z_1 .

За визначеними узагальненими координатами переміщення будь-якої i -ї точки платформи й її швидкість подаємо як суму векторів переміщень при поступальному й обертовому русі:

$$\Delta \bar{r}_i = \Delta \bar{r}_{tr} + \Delta \bar{r}_{rot_i} \quad (2)$$

Вектор поступального переміщення $\Delta \bar{r}_{tr}$ буде однаковим для будь-яких точок рухомої системи і є переміщенням центру мас O рухомої системи зі свого початкового положення O_1 . Цей вектор можна подати у вигляді: $\Delta \bar{r}_{tr} = x_1 \bar{i}_1 + y_1 \bar{j}_1 + z_1 \bar{k}_1$, де x_1, y_1, z_1 – проекції переміщення на нерухомі координатні осі; $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$ – орти за цими осями.

Вектор переміщення від обертового руху $\Delta \bar{r}_{rot_i}$ для кожної точки системи платформа–ротор буде мати своє значення. Знайдемо його як векторний добуток [13]:

$$\Delta \bar{r}_{rot_i} = \bar{\psi} \times \bar{r}_{rot_i}, \quad (3)$$

де $\bar{\psi}$ – вектор малого кута повороту системи a_1, b_1, c_1 відносно X, Y, Z , загальний для всіх точок системи; \bar{r}_{rot_i} – радіус-вектор i -ї точки відносно початку координат O .

Проекціями вектора малого кута повороту на координатні осі X, Y, Z є повороти навколо цих осей, тобто $\bar{\psi} = \alpha \bar{i} + \beta \bar{j} + \gamma \bar{k}$, де α, β, γ – проекції, або кути повороту навколо координатних осей X, Y, Z , прийняті за узагальнені координати коливальної системи.

Позначивши координати i -ї точки в системі координат X, Y, Z через x_i, y_i, z_i , знайдемо проекції переміщення на осі X, Y, Z i -ї точки в обертовому русі:

$$\Delta \bar{r}_{xrot_i} = \beta z_i - \gamma y_i; \quad \Delta \bar{r}_{yrot_i} = \gamma x_i - \alpha z_i; \quad \Delta \bar{r}_{zrot_i} = \alpha y_i - \beta x_i. \quad (4)$$

Проекціями повного переміщення i -ї точки з урахуванням (2), (3) і (6) є:

$$\Delta r_{x_i} = x_1 + \beta z_i - \gamma y_i; \quad \Delta r_{y_i} = y_1 + \gamma x_i - \alpha z_i; \quad \Delta r_{z_i} = z_1 + \alpha y_i - \beta x_i. \quad (5)$$

Швидкості тієї ж i -ї точки одержані диференціюванням за часом залежностей (7):

$$\Delta \dot{r}_{x_i} = \dot{x}_1 + \dot{\beta} z_i - \dot{\gamma} y_i; \quad \Delta \dot{r}_{y_i} = \dot{y}_1 + \dot{\gamma} x_i - \dot{\alpha} z_i; \quad \Delta \dot{r}_{z_i} = \dot{z}_1 + \dot{\alpha} y_i - \dot{\beta} x_i. \quad (6)$$

Однак, для розглядуваної схеми, рухи за узагальненими координатами x_1 і y_1 викликають повороти коливальної системи на деякі кути β_x і α_y , відповідно, через маятникову схему підвіски.

Таким чином, кути поворотів навколо осей X і Y будуть складатись власне з поворотів за узагальненими координатами α і β та доворотів β_x і α_y (індекси x і y указують на джерело їх виникнення), що викликані рухами за узагальненими координатами x_1 і y_1 у площинах YOX і XOZ відповідно.

Знайдемо зв'язок між доворотами β_x і α_y і узагальненими координатами x_1 і y_1 . Для цього розглянемо проекцію коливальної системи на площину YOX (рис. 2). На рис. 2 зображено схему підвіски у двох положеннях: у початковому положенні при відсутності рухів (положення DA_1B_1C) і в положенні, що відповідає переміщенню за узагальненою координатою y_1 (положення $DABC$). Вважаємо, що центр мас платформи точка O в загальному випадку не лежить на платформі. Розглянемо векторні суми:

$$\overline{DO'} = \overline{DA_1} + \overline{A_1K_1} + \overline{K_1O'}; \quad \overline{DO} = \overline{DA} + \overline{AK} + \overline{KO}.$$

Знайдемо проекції векторів $\overline{DO'}$ і \overline{DO} на вісь OY_1 . Маємо:

$$|DO'|_y = |DA_1| \cdot \sin \varphi_0 + |A_1K_1|; \quad |DO|_y = |DA| \cdot \sin(\varphi_0 + \varepsilon) + |AK| \cdot \cos \alpha_y + |OK| \cdot \sin \alpha_y.$$

Тоді переміщення точки O за узагальненою координатою y_1 виразиться як різниця проекцій на вісь OY_1 :

$$y_1 = |DO|_y - |DO'|_y.$$

Уважаючи ε_1 й α_y малими кутами й беручи до уваги, що $|A_1K_1| = |AK|$, $|DA_1| = |DA| = l_i$, після деяких перетворень одержимо: $y_{1i} = l_i \cdot \varepsilon \cdot \cos \varphi_0 + \alpha_y |OK|$. Відстань $|OK|$ чисельно дорівнює координаті z_k точки K в початковому положенні в системі координат X_1, Y_1, Z_1 , що безпосередньо видно з рис. 2. Тоді враховуючи, що $l_i \cdot \cos \varphi_0 = h_i$, одержимо: $y_{1i} = \varepsilon h_i + \alpha_y z_k$.

Установимо залежність між ε і α_y . Для цього спроекуємо замкнений багатокутник $DABC$ на осі Y_1 і Z_1 , одержимо:

$$\begin{aligned} l_1 \cdot \sin(\varphi_0 + \varepsilon) + b_2 \cdot \cos\alpha_y + l_1 \cdot \sin(\varphi_0 - \varepsilon) - S_2 &= 0 \\ -l_1 \cdot \cos(\varphi_0 + \varepsilon) - b_2 \cdot \sin\alpha_y + l_1 \cdot \cos(\varphi_0 - \varepsilon) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Виключаючи $\varphi_0 - \varepsilon$ (для чого відповідні члени переносимо в праву частину рівності (10), підносимо обидва рівняння у квадрат і додаємо їх), знайдемо після перетворень:

$$b_2^2 + S_2^2 + 2l_1 b_2 \cdot \sin(\varphi_0 + \varepsilon + \alpha_y) - 2S_2(l_1 \cdot \sin(\varphi_0 + \varepsilon) + b_2 \cdot \cos\alpha_y) = 0. \quad (8)$$

Уважаючи ε й α_y малими кутами, розкладаючи вираз (8) у ряд за степенями ε і α_y й обмежуючись малими другого порядку, одержимо:

$$2(b_2 - S_2)\varepsilon l_1 \cdot \cos\varphi_0 + 2b_2\alpha_y l_1 \cdot \cos\varphi_0 - 2b_2\varepsilon\alpha_y l_1 \cdot \sin\varphi_0 - (b_2 - S_2)\varepsilon^2 l_1 \cdot \sin\varphi_0 - \alpha_y^2(l_1 b_2 \cdot \sin\varphi_0 - b_2 S_2) = 0. \quad (9)$$

Щоб визначити з виразу (9) значення ε хоча б для малих значень α_y , можемо покласти:

$$\varepsilon = \lambda_1 \alpha_y + \lambda_2 \alpha_y^2 + \lambda_3 \alpha_y^3 + \dots \quad (10)$$

Вільний член цього розкладу відсутній, оскільки $\alpha_y = 0$ при $\varepsilon = 0$.

Підставляючи розклад (10) у вираз (9), зібравши коефіцієнти при однакових степенях, прирівнявши їх до нуля й беручи до уваги, що $\operatorname{tg}\varphi_0 = (S_2 - b_2)/2h_i$, одержимо послідовно:

$$\lambda_1 = \frac{b_2}{S_2 - b_2}, \quad \lambda_2 = \frac{b_2 S_2}{4h_i(S_2 - b_2)}, \quad \lambda_3 = \frac{\lambda_2 b_2 + \lambda_1 \lambda_2 (b_2 - S_2)}{b_2 - S_2} \cdot \operatorname{tg}\varphi_0. \quad (11)$$

Підставляючи (11) у розклад (10), одержимо

$$\varepsilon = \frac{b_2}{S_2 - b_2} \alpha_y + \frac{b_2 S_2}{4h_i(S_2 - b_2)} \alpha_y^2 + \dots \quad (12)$$

Підставивши отриманий вираз (12) у $y_{1i} = \varepsilon h_i + \alpha_y z_k$ одержимо:

$$y_{1i} = \left(\frac{b_2 h_i}{S_2 - b_2} + z_k \right) \alpha_y + \frac{b_2 S_2}{4(S_2 - b_2)} \alpha_y^2. \quad (13)$$

Для того, щоб виразити α_y через y_1 , покладемо: $\alpha_y = a_1 y_1 + a_2 y_1^2 + \dots$. Тоді, підставляючи цей вираз у (13), зібравши коефіцієнти при однакових степенях y_1 і прирівнявши їх до нуля, знайдемо:

$$a_1 = \frac{S_2 - b_2}{b_2 h_i + z_k (S_2 - b_2)}; \quad a_2 = \frac{b_2 S_2 (S_2 - b_2)^2}{(b_2 h_i + z_k (S_2 - b_2))^3}.$$

З урахуванням отриманих значень коефіцієнтів розкладу α_y набуде вигляду:

$$\alpha_y = \frac{S_2 - b_2}{b_2 h_i + z_k (S_2 - b_2)} y_1 - \frac{b_2 S_2 (S_2 - b_2)^2}{(b_2 h_i + z_k (S_2 - b_2))^3} y_1^2. \quad (14)$$

Аналогічно одержимо зв'язок між диворотом β_x і узагальненою координатою x_1 .

$$\beta_x = \frac{S_1 - b_1}{b_1 h_i + z_k (S_1 - b_1)} x_1 - \frac{b_1 S_1 (S_1 - b_1)^2}{(b_1 h_i + z_k (S_1 - b_1))^3} x_1^2. \quad (15)$$

За визначеними додатними напрямками x_1 , y_1 , α і β повні повороти коливальної системи навколо осей X_1 і Y_1 будуть рівні: $\alpha_1 = \alpha - \alpha_y$, $\beta_1 = \beta + \beta_x$.

Знайдемо деформацію підвіски платформи при коливаннях. Повне переміщення точки i кріплення i -го стержня до платформи в системі координат X_1 , Y_1 , Z_1 знаходимо як $\Delta r_i = \sqrt{\Delta r_{x_i}^2 + \Delta r_{y_i}^2 + \Delta r_{z_i}^2}$, де Δr_{x_i} , Δr_{y_i} , Δr_{z_i} – проєкції повного переміщення точки i , обумовлені залежностями (5).

Довжину i -ї підвіски в довільний момент часу можна подати у вигляді векторної суми:

$$\bar{l}'_i = \bar{l}_i + \Delta \bar{r}_i.$$

Проектуючи цю рівність на осі X_1 , Y_1 , Z_1 , одержимо:

$$l'_{ix} = l_{ix} + \Delta r_{x_i}; \quad l'_{iy} = l_{iy} + \Delta r_{y_i}; \quad l'_{iz} = l_{iz} + \Delta r_{z_i}.$$

Тоді довжину i -ї підвіски в довільний момент часу визначимо так: $l'_i = \sqrt{l_{ix}^2 + l_{iy}^2 + l_{iz}^2}$. Шукане повне подовження підвіски: $\Delta l_i = l'_i - l_i$. Піднесемо обидві частини цього виразу у квадрат. В результаті математичних перетворень із врахуванням (5) одержимо:

$$\begin{aligned} \Delta l_i^2 &= (l_{ix} + x_1 + \beta z_i - \gamma y_i)^2 + (l_{iy} + y_1 + \gamma x_i - \alpha z_i)^2 + (l_{iz} + z_1 + \alpha y_i - \beta x_i)^2 + l_i^2 - 2l_i \times \\ &\times \sqrt{(l_{ix} + x_1 + \beta z_i - \gamma y_i)^2 + (l_{iy} + y_1 + \gamma x_i - \alpha z_i)^2 + (l_{iz} + z_1 + \alpha y_i - \beta x_i)^2}, \end{aligned} \quad (16)$$

де x_1, y_1, z_1 – координати точки i кріплення стержня до платформи в системі координат X, Y, Z за відсутності руху за узагальненими координатами. У виразі (16) кути α й β слід замінити на повні повороти α_1 і β_1 , що враховують особливості схеми підвіски коливальної системи у вигляді складного маятника.

Розкладемо праву частину виразу (16) у ряд за степенями $x_1, y_1, z_1, \alpha, \beta, \gamma$. Тоді, враховуючи співвідношення (14), (15), одержимо з точністю до величин другого порядку малості:

$$\begin{aligned} \Delta l_i^2 = & a_{11}^{(i)} x_1^2 + a_{22}^{(i)} y_1^2 + a_{33}^{(i)} z_1^2 + a_{44}^{(i)} \alpha^2 + a_{55}^{(i)} \beta^2 + a_{66}^{(i)} \gamma^2 + \\ & + 2a_{12}^{(i)} x_1 y_1 + 2a_{13}^{(i)} x_1 z_1 + 2a_{23}^{(i)} y_1 z_1 + 2a_{14}^{(i)} x_1 \alpha + 2a_{15}^{(i)} x_1 \beta + \\ & + 2a_{16}^{(i)} x_1 \gamma + 2a_{24}^{(i)} y_1 \alpha + 2a_{25}^{(i)} y_1 \beta + 2a_{26}^{(i)} y_1 \gamma + 2a_{34}^{(i)} z_1 \alpha + \\ & + 2a_{35}^{(i)} z_1 \beta + 2a_{36}^{(i)} z_1 \gamma + 2a_{45}^{(i)} \alpha \beta + 2a_{46}^{(i)} \alpha \gamma + 2a_{56}^{(i)} \beta \gamma. \end{aligned} \quad (17)$$

Коефіцієнти $a_{kl}^{(i)}$ ($k, l = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) у виразі (17) мають вигляд:

$$\begin{aligned} a_{11}^{(i)} = & \left(\frac{d_1^{(i)}}{l_i} \right)^2; \quad a_{12}^{(i)} = \frac{d_1^{(i)} d_2^{(i)}}{l_i^2}; \quad a_{13}^{(i)} = \frac{l_z d_1^{(i)}}{l_i^2}; \quad a_{22}^{(i)} = \left(\frac{d_2^{(i)}}{l_i} \right)^2; \quad a_{23}^{(i)} = \frac{l_z d_2^{(i)}}{l_i^2}; \quad a_{24}^{(i)} = \frac{d_5^{(i)} d_2^{(i)}}{l_i^2}; \\ a_{14}^{(i)} = & \frac{d_5^{(i)} d_1^{(i)}}{l_i^2}; \quad a_{15}^{(i)} = \frac{d_1^{(i)} d_6^{(i)}}{l_i^2}; \quad a_{16}^{(i)} = \frac{d_1^{(i)} d_7^{(i)}}{l_i^2}; \quad a_{25}^{(i)} = \frac{d_2^{(i)} d_6^{(i)}}{l_i^2}; \quad a_{26}^{(i)} = \frac{d_2^{(i)} d_7^{(i)}}{l_i^2}; \quad a_{33}^{(i)} = \frac{l_z^2}{l_i^2}; \\ a_{34}^{(i)} = & \frac{l_z d_5^{(i)}}{l_i^2}; \quad a_{35}^{(i)} = \frac{l_z d_6^{(i)}}{l_i^2}; \quad a_{36}^{(i)} = \frac{l_z d_7^{(i)}}{l_i^2}; \quad a_{44}^{(i)} = \left(\frac{d_5^{(i)}}{l_i} \right)^2; \quad a_{45}^{(i)} = \frac{d_5^{(i)} d_6^{(i)}}{l_i^2}; \quad a_{46}^{(i)} = \frac{d_7^{(i)} d_5^{(i)}}{l_i^2}; \\ & a_{55}^{(i)} = \left(\frac{d_6^{(i)}}{l_i} \right)^2; \quad a_{56}^{(i)} = \frac{d_6^{(i)} d_7^{(i)}}{l_i^2}; \quad a_{66}^{(i)} = \left(\frac{d_7^{(i)}}{l_i} \right)^2, \end{aligned} \quad (18)$$

де

$$\begin{aligned} d_1^{(i)} = & l_{ix} + d_3^{(i)} d_6^{(i)}; \quad d_2^{(i)} = l_{iy} - d_5^{(i)} d_4^{(i)}; \quad d_7^{(i)} = x_1 l_{iy} - y_1 l_{ix}; \\ d_5^{(i)} = & y_1 l_{iz} - z_1 l_{iy}; \quad d_6^{(i)} = z_1 l_{ix} - x_1 l_{iz}; \quad d_3 = \frac{S_1 - b_1}{b_1 h_1 + z_k (S_1 - b_1)}; \quad d_4 = \frac{S_2 - b_2}{b_2 h_1 + z_k (S_2 - b_2)}, \end{aligned} \quad (19)$$

де X_i, Y_i, Z_i – координати точок приєднання до платформи i -го демпфера й (або) пружного елемента.

$$l_{ix} = -l_i \cdot \sin \varphi_1 \cos \varphi_{2i}; \quad l_{iy} = l_i \cdot \sin \varphi_1 \sin \varphi_{2i}; \quad l_{iz} = -l_i \cdot \cos \varphi_1, \quad (20)$$

де φ_{2i} – кут між додатним напрямком осі X і проекцією i -ї підвіски на площину XOY , вимірюваний за напрямком годинникової стрілки від додатного напрямку осі X .

Знайдемо швидкість деформації i -ї підвіски. Для цього продиференціюємо за часом вираз $\Delta l_i = l'_i - l_i$.

$$\Delta \dot{l}_i = \dot{l}'_i. \quad (21)$$

Піднесемо обидві частини виразу (21) у квадрат і врахувавши (20), отримаємо:

$$\Delta \dot{l}_i^2 \left((l_{ix} + \Delta r_{x_i})^2 + (l_{iy} + \Delta r_{y_i})^2 + (l_{iz} + \Delta r_{z_i})^2 \right) = (l_{ix} + \Delta r_{x_i}) \Delta \dot{r}_{x_i} + (l_{iy} + \Delta r_{y_i}) \Delta \dot{r}_{y_i} + (l_{iz} + \Delta r_{z_i}) \Delta \dot{r}_{z_i}, \quad (22)$$

де значення $\Delta \dot{r}_{x_i}, \Delta \dot{r}_{y_i}, \Delta \dot{r}_{z_i}$ визначаються виразами (6).

Підставимо в (22) вирази (5) і (6) і, враховуючи співвідношення (14), (15), з точністю до величин другого порядку малості одержимо:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{l}_i^2 = & a_{11}^{(i)} \dot{x}_1^2 + a_{22}^{(i)} \dot{y}_1^2 + a_{33}^{(i)} \dot{z}_1^2 + a_{44}^{(i)} \dot{\alpha}^2 + a_{55}^{(i)} \dot{\beta}^2 + \\ & + a_{66}^{(i)} \dot{\gamma}^2 + a_{12}^{(i)} \dot{x}_1 \dot{y}_1 + a_{13}^{(i)} \dot{x}_1 \dot{z}_1 + a_{23}^{(i)} \dot{y}_1 \dot{z}_1 + \\ & + 2a_{14}^{(i)} \dot{x}_1 \dot{\alpha} + 2a_{15}^{(i)} \dot{x}_1 \dot{\beta} + 2a_{16}^{(i)} \dot{x}_1 \dot{\gamma} + 2a_{24}^{(i)} \dot{y}_1 \dot{\alpha} + 2a_{25}^{(i)} \dot{y}_1 \dot{\beta} + 2a_{26}^{(i)} \dot{y}_1 \dot{\gamma} + 2a_{34}^{(i)} \dot{z}_1 \dot{\alpha} + 2a_{35}^{(i)} \dot{z}_1 \dot{\beta} + \\ & + 2a_{36}^{(i)} \dot{z}_1 \dot{\gamma} + 2a_{45}^{(i)} \dot{\alpha} \dot{\beta} + 2a_{46}^{(i)} \dot{\alpha} \dot{\gamma} + 2a_{56}^{(i)} \dot{\beta} \dot{\gamma}, \end{aligned} \quad (23)$$

де значення коефіцієнтів $a_{kl}^{(i)}$ ($k, l = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) задаються виразами (18).

Знайдемо деформації ущільнювальної діафрагми при коливаннях. Ґрунтуючись на виразах (5) запишемо:

$$\Delta r_{x_m} = x_1 + \beta_1 z_m - \gamma y_m; \quad \Delta r_{y_m} = y_1 + \gamma x_m - \alpha_1 z_m; \quad \Delta r_{z_m} = z_1 + \alpha_1 y_m - \beta_1 x_m, \quad (24)$$

де X_m, Y_m, Z_m – координати точки М кріплення діафрагми до платформи в системі координат X, Y, Z за відсутності рухів; α_1, β_1 – кути поворотів платформи навколо осей X і Y , відповідно.

Підставляючи в (24) співвідношення (14) і (15), після перетворень одержимо:

$$\Delta r_{x_m} = (1 + z_m d_3) x_1 + \beta z_m - \gamma m; \quad \Delta r_{y_m} = (1 + z_m d_4) y_1 + \gamma x_m - \alpha z_m; \quad \Delta r_{z_m} = z_1 + \alpha y_m - \beta x_m - y_m d_4 y_1 - x_m d_3 x_1, \quad (25)$$

Піднесемо обидві частини виразів (25) у квадрат і одержимо:

$$\begin{aligned} \Delta r_{x_m}^2 &= (1 + z_m d_3)^2 x_1^2 + 2z_m(1 + z_m d_3)x_1\beta + \beta^2 z_m^2 - 2y_m(1 + z_m d_3)x_1\gamma - 2y_m z_m \gamma \beta + \gamma^2 z_m^2; \\ \Delta r_{y_m}^2 &= (1 + z_m d_4)^2 y_1^2 + 2x_m(1 + z_m d_4)y_1\gamma + \gamma^2 x_m^2 - 2z_m(1 + z_m d_4)y_1\alpha - 2x_m z_m \gamma \alpha + \alpha^2 z_m^2; \\ \Delta r_{z_m}^2 &= z_1^2 + \alpha^2 y_m + \beta^2 x_m^2 + y_m^2 y_1^2 d_4^2 + x_m^2 x_1^2 d_3^2 + 2y_m z_1 \alpha - 2x_m z_1 \beta - 2y_m z_1 y_1 d_4 - 2x_m z_1 x_1 d_3 - \\ &\quad - 2y_m x_m \alpha \beta - 2y_m y_1 d_4 \alpha - 2y_m x_m x_1 d_3 \alpha + 2x_m^2 x_1 d_3 \beta + 2y_m x_m d_3 d_4 x_1 y_1. \end{aligned} \quad (26)$$

Вираз для кінетичної енергії коливальної системи. Кінетична енергія системи за використання теореми Кьоніга [14] визначається як сума енергій у поступальному й обертовому русі коливної системи з урахуванням енергії прецесійного руху ротора як гіроскопа:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2 \right) + \frac{1}{2} I_{a_1} \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} I_{b_1} \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} I_{c_1} \dot{\gamma}^2 + \\ &\quad + m_2 \dot{y}_1 \left(\dot{\gamma} x_D - \dot{\alpha} z_D + \omega e \cos \omega t \right) - m_2 \dot{\alpha} z_D \left(\dot{\gamma} x_D + \right. \\ &\quad \left. + \omega e \cos \omega t \right) + m_2 \dot{\gamma} \omega e (x_D \cos \omega t + y_D \sin \omega t) + \\ &\quad + m_2 \omega^2 e^2 \cos \omega t + m_2 \dot{z}_1 \left(\dot{\alpha} y_D - \dot{\beta} x_D \right) - m_2 \dot{\alpha} \dot{\beta} x_D y_D + \\ &\quad + m_2 \dot{x}_1 \left(\dot{\beta} z_D - \dot{\gamma} y_D - \omega e \sin \omega t \right) - m_2 \dot{\beta} z_D \left(\dot{\gamma} y_D + \omega e \sin \omega t \right) + \frac{1}{2} I_{c_1}^{(2)} \omega^2 + I_{c_1}^{(2)} \omega \left(\dot{\gamma} + \beta \dot{\alpha} - \alpha \dot{\beta} \right), \end{aligned} \quad (27)$$

де m – маса системи платформа-ротор; m_2 – маса ротора; $I_{a_1}, I_{b_1}, I_{c_1}$ – моменти інерції коливальної системи відносно осей a_1, b_1, c_1 відповідно; $I_{c_1}^{(2)}$ – момент інерції ротора щодо головної центральної осі c_2 ; x_D, y_D, z_D – координати точки D у системі координат X, Y, Z за відсутності коливань. Точка D – точка перетину осі обертання ротора і перпендикуляра, опущеного на вісь із точки S – центру мас ротора; e – ексцентриситет ротора.

Для складання виразу для кінетичної енергії коливальної системи необхідно у виразі (27) замість кутів α і β підставити кути повних поворотів α_1 і β_1 навколо осей X і Y , значення яких задаються виразами (14) і (15).

З урахуванням співвідношень (14), (15) після виконання математичних перетворень одержимо вираз для кінетичної енергії системи платформа-ротор з точністю до величин другого порядку малості у вигляді:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2 \right) + \frac{1}{2} I_{a_1} \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} I_{b_1} \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} I_{c_1} \dot{\gamma}^2 - \\ &\quad - I_{a_1} d_4 \dot{y}_1 \dot{\alpha} + \frac{1}{2} I_{a_1} d_4^2 \dot{y}_1^2 + I_{b_1} d_3 \dot{x}_1 \dot{\beta} + \frac{1}{2} I_{b_1} d_3^2 \dot{x}_1^2 + \\ &\quad + m_2 \dot{y}_1 \left(\dot{\gamma} x_D - \left(\dot{\alpha} - d_4 \dot{y}_1 \right) z_D + \omega e \cos \omega t \right) - m_2 z_D \times \\ &\quad \times \left(\dot{\alpha} - d_4 \dot{y}_1 \right) \left(\dot{\gamma} x_D + \omega e \cos \omega t \right) + m_2 \dot{\gamma} \omega e (x_D \cos \omega t + \\ &\quad + y_D \sin \omega t) + m_2 \omega^2 e^2 \cos^2 \omega t + m_2 \dot{z}_1 \left(\left(\dot{\alpha} - d_4 \dot{y}_1 \right) y_D - \right. \\ &\quad \left. - \left(\dot{\beta} + d_3 \dot{x}_1 \right) x_D \right) - m_2 x_D y_D \left(\dot{\alpha} - d_4 \dot{y}_1 \right) \left(\dot{\beta} + d_3 \dot{x}_1 \right) + \\ &\quad + m_2 \dot{x}_1 \left(\left(\dot{\beta} + d_3 \dot{x}_1 \right) z_D - \dot{\gamma} y_D - \omega e \sin \omega t \right) - m_2 z_D \left(\dot{\beta} + d_3 \dot{x}_1 \right) \left(\dot{\gamma} y_D - \omega e \sin \omega t \right) + \frac{1}{2} I_{c_1}^{(2)} \omega^2 + \end{aligned} \quad (28)$$

$$+ I_{c_2}^{(2)} \omega \left(\dot{\gamma} \left(\beta + d_3 \dot{x}_1 \right) \left(\dot{\alpha} - d_4 \dot{y}_1 \right) - \left(\alpha - d_4 \dot{y}_1 \right) \left(\dot{\beta} + d_3 \dot{x}_1 \right) \right),$$

де d_3, d_4 – коефіцієнти, значення яких задаються виразами (19).

Вирази для потенціальної енергії й енергії розсіювання коливальної системи. Потенціальна енергія системи платформа–ротор складається з потенціальної енергії сил ваги Π_1 і потенціальної енергії пружних сил Π_2 . Потенціальна енергія сил ваги при рухах коливальної системи за узагальненими координатами має вигляд:

$$\Pi_1 = m_1 g \Delta r_{z_1 o} + m_2 g \Delta r_{z_1 s}, \tag{29}$$

де m_1 – маса платформи; m_2 – маса ротора; $\Delta r_{z_1 o}, \Delta r_{z_1 s}$ – проєкції повного переміщення центрів мас платформи точки O і ротора точки S на координатну вісь Z_1 , що визначені виразом:

$$\Delta r_{z_1 i} = z_1 + \alpha y_i - \beta x_i. \tag{30}$$

Координати центру мас ротора точка S у системі координат X, Y, Z у початковому положенні, коли вісь X збігається з a_1, Y – з b_1 і Z – з c_1 , подамо у вигляді:

$$x_s = x_D + e \cos \omega t; \quad y_s = y_D + e \sin \omega t; \quad z_s = z_D. \tag{31}$$

Розкладемо вираз (28) у ряд за степенями $x_1, y_1, z_1, \alpha, \beta, \gamma$. Вважаючи узагальнені сили в положенні рівноваги рівними нулю й враховуючи співвідношення (30), (14), (15) і (31), після математичних перетворень одержимо:

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} mg \left(\delta_1 x_1^2 + \delta_2 y_1^2 + \delta_3 \gamma_1^2 \right), \tag{32}$$

де коефіцієнти $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ мають вигляд:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{1}{(b_1 h + z_K (S_1 - b_1))^2} \left(b_1^2 h + 2(S_1 - b_1)^2 z_K + \frac{2m_2}{m} x_D S_1 b_1 d_3^2 \right); \\ \delta_2 &= \frac{1}{(b_2 h + z_K (S_2 - b_2))^2} \left(b_2^2 h + 2(S_2 - b_2)^2 z_K + \frac{2m_2}{m} y_D S_2 b_2 d_4^2 \right); \\ \delta_3 &= \frac{b_1^2 + b_2^2}{4h} \left(1 + 4 \left(\frac{b_2 y_D - b_1 x_D}{b_1^2 + b_2^2} \right)^2 \right), \end{aligned} \tag{33}$$

де d_3, d_4 – коефіцієнти, значення яких задаються виразами (19); z_K – координата точки K (рис. 2) у початковому положенні за відсутності рухів.

Потенціальна енергія пружних сил визначається пружними деформаціями підвісок Π_2 і ущільнювальної діафрагми Π''_2 як $\Pi_2 = \Pi_2 + \Pi''_2$.

Потенціальна енергія пружних деформацій підвісок має вигляд:

$$\Pi_2' = \frac{1}{2} \sum_1^n c_{1i} \Delta l_i^2, \tag{34}$$

де Δl_i – деформація i -ї підвіски; c_{1i} – жорсткість пружини i -ї підвіски; n – кількість підвісок коливальної системи.

Потенціальна енергія пружних деформацій ущільнювальної діафрагми має вигляд:

$$\Pi_2'' = \frac{1}{2} \left(c_{2x} \cdot \Delta r_{x_1 m}^2 + c_{2y} \cdot \Delta r_{y_1 m}^2 + c_{2z} \cdot \Delta r_{z_1 m}^2 \right), \tag{35}$$

де $\Delta r_{x_1 m}, \Delta r_{y_1 m}, \Delta r_{z_1 m}$ – переміщення по осях X_1, Y_1, Z_1 точки приєднання діафрагми до платформи, визначені виразами (26). Тоді повна потенціальна енергія коливальної системи з урахуванням виразів (32), (34) і (35) набуде вигляду:

$$\Pi = \frac{1}{2} mg \left(\delta_1 x_1^2 + \delta_2 y_1^2 + \delta_3 \gamma_1^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_1^n c_{1i} \Delta l_i^2 + \frac{1}{2} \left(c_{2x} \cdot \Delta r_{x_1 m}^2 + c_{2y} \cdot \Delta r_{y_1 m}^2 + c_{2z} \cdot \Delta r_{z_1 m}^2 \right) \tag{36}$$

Розсіювання енергії за рахунок в'язкого тертя в демпферах, установлених на підвісках, що залежить від швидкості деформації підвісок, мають вигляд:

$$D = \frac{1}{2} \sum_1^m h_1 \dot{\Delta l}_i^2, \tag{37}$$

де h_1 – стала в'язкого тертя i -го демпфера; m – кількість демпферів.

Переміщення Δl_i й швидкості $\dot{\Delta l}_i$, що входять у вирази (36) і (37), залежать як від поступального, так і обертового рухів системи. Це визначається виразами (17), (18) і (22), у яких x_i, y_i, z_i набувають значень

координат точок приєднання до рухомої системи підвісок або демпферів, прийняті при малих переміщеннях незмінними.

Рівняння руху коливальної системи. Виконуючи математичні перетворення, передбачені рівнянням Лагранжа з шістьма узагальненими координатами, вважаючи $\omega = \text{const}$ і опускаючи індекси при x_1, y_1, z_1 , одержимо систему з шести диференціальних рівнянь, матричний запис яких має вигляд:

$$M \cdot \ddot{Q} + (G + D) \cdot \dot{Q} + A \cdot Q = F \quad (38)$$

де $Q = (x \ y \ z \ \alpha \ \beta \ \gamma)^T$ – матриця узагальнених координат; M – матриця інерційних коефіцієнтів; C – матриця жорсткості; D – матриця демпфірування; G – матриця гіроскопічних коефіцієнтів; F – матриця узагальнених силових чинників.

$$M = \begin{pmatrix} m + I_b d_3^2 + 2m_2 z_D d_3 & m_2 x_D y_D d_3 d_4 & -m_2 x_D d_3 & -m_2 y_D d_3 & I_b d_3 + m_2 z_D & -m_2 y_D - m_2 y_D z_D d_3 \\ m_2 x_D y_D d_3 d_4 & m + I_{a_1} d_4^2 + 2m_2 z_D d_4 & -m_2 y_D d_4 & -m_2 z_D - I_{a_1} d_4 & m_2 x_D y_D d_4 & m_2 x_D + m_2 x_D z_D d_4 \\ -m_2 x_D d_3 & -m_2 y_D d_4 & m & m_2 y_D & -m_2 x_D & 0 \\ -m_2 y_D d_3 & -m_2 z_D - I_{a_1} d_4 & m_2 y_D & I_{a_1} & -m_2 x_D y_D & -m_2 x_D z_D \\ I_b d_3 + m_2 z_D & m_2 x_D y_D d_4 & -m_2 x_D & -m_2 x_D y_D & I_b & -m_2 y_D z_D \\ -m_2 y_D - m_2 y_D z_D d_3 & m_2 x_D + m_2 x_D z_D d_4 & 0 & -m_2 x_D z_D & -m_2 y_D z_D & I_{c_1} \end{pmatrix} \quad (39)$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 2I_{c_2}^{(2)} \omega d_3 d_4 & 0 & -2I_{c_2}^{(2)} \omega d_3 & 0 & 0 \\ -2I_{c_2}^{(2)} \omega d_3 d_4 & 0 & 0 & 0 & -2I_{c_2}^{(2)} \omega d_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2I_{c_2}^{(2)} \omega d_3 & 0 & 0 & 0 & 2I_{c_2}^{(2)} \omega & 0 \\ 0 & 2I_{c_2}^{(2)} \omega d_4 & 0 & -2I_{c_2}^{(2)} \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (40)$$

де d_3, d_4 – коефіцієнти, що залежать від розмірів підвіски, значення яких задаються виразами (19).

$$D = (d_{ij} = d_{ji} = d_{kl}), \quad (41)$$

де $d_{kl} = \sum_1^m h_{\chi} a_{kl}^{(\chi)}$, тут $a_{kl}^{(\chi)}$ – коефіцієнти, що залежать від координат $x_{\chi}, y_{\chi}, z_{\chi}$ точок приєднання χ -ї

підвіски з демпфером до платформи машини, значення яких задаються виразом (18), з урахуванням заміни індексу i на χ з метою виключення подвійного тлумачення індексів.

Елементи a_{ij} матриці A мають вигляд:

$$\begin{aligned} a_{11} &= mg\delta_1 + \sum_1^n c_{1\chi} a_{11}^{(\chi)} + c_{2x}(1 + z_M d_3)^2 + c_{2z} x_M^2 d_3^2; \quad a_{12} = a_{21} = \sum_1^n c_{1\chi} a_{12}^{(\chi)} + c_{2z} x_M y_M d_3 d_4; \\ a_{13} &= a_{31} = \sum_1^n c_{1\chi} a_{13}^{(\chi)} - c_{2z} x_M d_3; \quad a_{14} = a_{41} = \sum_1^n c_{1\chi} a_{14}^{(\chi)} - c_{2z} y_M x_M d_3; \\ a_{15} &= a_{51} = \sum_1^n c_{1\chi} a_{15}^{(\chi)} + c_{2x} z_M (1 + z_M d_3) + c_{2z} x_M^2 d_3; \\ a_{16} &= a_{61} = \sum_1^n c_{1\chi} a_{16}^{(\chi)} - c_{2x} y_M (1 + z_M d_3); \\ a_{22} &= mg\delta_2 + \sum_1^n c_{1\chi} a_{22}^{(\chi)} + c_{2y}(1 + z_M d_4)^2 + c_{2z} y_M^2 d_4^2; \quad a_{33} = \sum_1^n c_{1\chi} a_{33}^{(\chi)} + c_{2z}; \\ a_{23} &= a_{32} = \sum_1^n c_{1\chi} a_{23}^{(\chi)} - c_{2x} y_M d_4; \quad a_{24} = a_{42} = \sum_1^n c_{1\chi} a_{24}^{(\chi)} - c_{2y} z_M (1 + z_M d_4) - c_{2z} y_M^2 d_4; \\ a_{26} &= a_{62} = \sum_1^n c_{1\chi} a_{26}^{(\chi)} - c_{2y} x_M (1 + z_M d_4); \quad a_{34} = a_{43} = \sum_1^n c_{1\chi} a_{34}^{(\chi)} + c_{2z} y_M; \\ a_{35} &= a_{53} = \sum_1^n c_{1\chi} a_{35}^{(\chi)} - c_{2z} x_M; \quad a_{36} = a_{63} = \sum_1^n c_{1\chi} a_{36}^{(\chi)}; \quad a_{44} = \sum_1^n c_{1\chi} a_{44}^{(\chi)} + c_{2y} z_M^2 + c_{2z} y_M^2; \\ a_{45} &= a_{54} = \sum_1^n c_{1\chi} a_{45}^{(\chi)} - c_{2z} y_M x_M; \quad a_{46} = a_{64} = \sum_1^n c_{1\chi} a_{46}^{(\chi)} - c_{2y} x_M z_M; \end{aligned} \quad (42)$$

$$a_{55} = \sum_1^n c_{1\chi} a_{55}^{(\chi)} + c_{2x} z_M^2 + c_{2z} x_M^2 ; a_{56} = a_{65} = \sum_1^n c_{1\chi} a_{56}^{(\chi)} - c_{2y} y_M z_M ;$$

$$a_{66} = \sum_1^n c_{1\chi} a_{66}^{(\chi)} + c_{2x} z_M^2 + c_{2y} x_M^2 + mg\delta_3 ,$$

де $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ – допоміжні коефіцієнти, що залежать від параметрів $S_1, S_2, b_1, b_2, l, \varphi_1$ підвіски й визначаються виразами (33); x_M, y_M, z_M – координати точки М приєднання ущільнювальної діафрагми до платформи в системі координат X, Y, Z за відсутності рухів за узагальненими координатами.

$$F = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ F_\alpha \\ F_\beta \\ F_\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_2 \cdot \omega^2 \cdot e \cdot (1 + z_D \cdot d_3) \cdot \cos \omega t \\ m_2 \cdot \omega^2 \cdot e \cdot (1 + z_D \cdot d_4) \cdot \sin \omega t \\ 0 \\ -m_2 \cdot \omega^2 \cdot e \cdot z_D \cdot \sin \omega t \\ m_2 \cdot \omega^2 \cdot e \cdot z_D \cdot \sin \omega t \\ m_2 \cdot \omega^2 \cdot e \cdot (y_D \cos \omega t + x_D \sin \omega t) \end{pmatrix} \quad (43)$$

Аналіз системи диференціальних рівнянь. Отримана система рівнянь показує наявність великої кількості зв'язків між рухами за обраними координатами через розбіжність центру мас платформи із центром мас зрівноваженого ротора. У розглянутому загальному випадку руху коливальна система платформа-ротор робить шестизв'язні коливання, при яких збурювання, що діє в одному напрямку, викликає коливання уздовж і навколо всіх осей декартової системи координат, використовуваної для визначення положення коливальної частини машини.

З теорії коливань відомо, що чим вища зв'язність коливань, тем ширший, за інших рівних умов, спектр власних частот, тобто тим більша різниця між вищою й нижчою частотами вільних коливань [13, 14]. Крім того, коли всі шість частот є зв'язаними й виникає необхідність змінити значення однієї з них, то змінюються значення всіх інших частот. Це ускладнює завдання віброізоляції й зниження динамічної активності системи платформа-ротор, тому бажано з'ясувати практичні можливості зменшення зв'язності коливань, які можуть бути реалізовані при конструюванні машин.

Для розглядуваної розрахункової схеми між узагальненими координатами існує інерційний, дисипативний, пружний і гіроскопічний зв'язки, що безпосередньо впливає зі структури матриць M, G, D, A .

Суттєво зменшити зв'язність коливань системи платформа-ротор можна, якщо розташувати центр мас платформи точку O на осі обертання ротора (рис. 1). У цьому випадку координати $x_D = y_D = 0$ і всі позадіагональні елементи матриці M , крім $m_{15} = m_{51} = I_{b1}d_3 + m_2z_D$ і $m_{24} = m_{42} = -I_{a1}d_4 - m_2z_D$, обертаються в нуль. У цьому випадку при розгляді вимушених коливань системи платформа-ротор обертаються в нуль узагальнені силові фактори за координатою γ , що безпосередньо впливає з виразів (43).

Подальшого зменшення зв'язності коливань можна досягти, якщо розташувати пружні опори й демпфери таким чином, щоб точки їх приєднання до платформи утворювали геометричну фігуру, симетричну щодо координатних площин, що містять головні центральні осі інерції платформи. Це безпосередньо впливає з розгляду структури коефіцієнтів d_{ij} і a_{ij} , і застосування до них понять статичних і відцентрових моментів жорсткостей. У цьому випадку повністю буде усунути дисипативний зв'язок і суттєво зменшиться пружний зв'язок.

Однією з особливостей розглядуваної математичної моделі є неможливість виконання умови $z_D = 0$. Тому повністю усунути інерційну зв'язність у даній конструкції не є можливим. Подальше її зменшення може бути пов'язане з виконанням умов $d_3 = d_4 = 0$. З виразів (19), що визначає значення цих коефіцієнтів, впливає $d_3 = d_4 = 0$ у тому випадку, коли $S_1 = b_1$ і $S_2 = b_2$, тобто платформа машини повинна бути підвіщена на вертикальних підвісках, що безпосередньо видно з рис. 2. Застосування в конструкції машини вертикальних підвісок зменшить пружний і гіроскопічний зв'язки коливань і величини збурювальних сил уздовж осей X і Y , що впливає з виразів (40), (42) і (43).

Аналіз виразів (42) для коефіцієнтів a_{ij} матриці жорсткості A показує, при виконанні вже перерахованих вимог повністю усунути пружний зв'язок коливань між узагальненими координатами можна за умови $c_{2x}, c_{2y}, c_{2z} = 0$. Інакше кажучи, необхідно замінити пружну ущільнювальну діафрагму на безжорсткісну.

Висновки

Запропонована динамічна модель роторної машини з вертикальною віссю обертання, що має шість ступенів свободи. Складені диференціальні рівняння вільних і вимушених коливань роторної системи. Показано, що при розгляді загального випадку коливань роторної системи має місце висока зв'язність коливань за всіма узагальненими координатами. На основі аналізу диференціальних рівнянь показані шляхи зниження віброактивності та зв'язності коливань машини, які передбачають:

- зведення центра мас платформи до осі обертання ротора;
- суміщення центра жорсткості системи пружних опор з центром ваги платформи, а головних осей

жорсткості і сталих в'язкого тертя демпферів з головними центральними осями інерції платформи;
– використання в конструкції машини вертикальних підвісів для коливної системи;
– заміну пружної ущільнюючої діафрагми ротора на безжорсткісну.

Перераховані вище заходи щодо зменшення зв'язності коливань і віброактивності не дозволяють повністю усунути коливання машини, що викликаються стохастичними, змінними дисбалансами. Тому подальше зниження віброактивності машини може бути пов'язане із застосуванням автобалансувальних пристроїв, що дозволяють зменшити збурювальні сили за рахунок зменшення величини стохастичних дисбалансів роторної машини.

Література

1. Торгашев В.Е. Исследование автобалансирующих устройств роторных машин / В.Е. Торгашев // Инженерные решения. – 2019. – № 8(9). – С. 7–10.
2. Ribeiro E. A. Passive vibration control in rotor dynamics: optimization of composed support using viscoelastic materials / E. A. Ribeiro, J. T. Pereira, C. A. Bavastri // Journal of Sound and Vibration. – 2015. – 351. – P. 43–56.
3. Osinski Z. (Ed.) Damping of vibrations. CRC Press. 2018.
4. Shen Y. Improved design of dynamic vibration absorber by using the inerter and its application in vehicle suspension / Y. Shen, L. Chen, X. Yang, D. Shi, J. Yang // Journal of Sound and Vibration – 2016. – 361. – P. 148–158.
5. MacCamhaoil M. Static and dynamic balancing of rigid rotors. Bruel & Kjaer application notes BO, 0276-12. 2016.
6. Goroshko A. Balancing of turbomachine rotors by increasing the eccentricity identification accuracy / A. Goroshko, V. Ostaševičius, V. Rozman // Mechanics. – 2016. – 22(3). – P. 206–211.
7. Wan S.K. Active damping of milling chatter vibration via a novel spindle system with an integrated electromagnetic actuator / S.K. Wan, X.H. Li, W.J. Su // Precision Engineering. – 2019. – 57. – P. 203–210.
8. Fan H. W. Adaptive rotor balancing algorithm and single-disk rotation test for electromagnetic balancer / H. W. Fan, J. J. Zhi, B. J. Shi // Journal of Xi'an Jiaotong University. – 2018. – 52(8). – P. 15–21.
9. Peng C. Optimal synchronous vibration control for magnetically suspended centrifugal compressor / C. Peng, J. X. He, M. T. Zhu // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2019. – 132. – P. 776–789.
10. Ulasayar A. Design and analysis of a new magneto rheological damper for washing machine / A. Ulasayar, I. Lazoglu // J Mech Sci Technol. – 2018. – 32. – P. 1549–1561.
11. Парс Л.А. Аналитическая динамика / Парс Л.А. – М. : Наука, 1971. – 636 с.
12. Pan X. A Review on Self-Recovery Regulation (SR) Technique for Unbalance Vibration of High-End Equipment / X. Pan, J. Lu, J. Huo // Chin. J. Mech. Eng. – 2020. – 33. – 89 p.
13. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний : учебник / Стрелков С.П. – СПб : Издательство «Лань», 2005. – 440 с.
14. Кельзон А.С. Управление колебаниями роторов / А.С. Кельзон, Л.М. Малинин. – СПб : Политехника, 1992. – 120 с.

References

1. Torgashev V.E. Issledovanie avtobalansiruyushchih ustrojstv rotornih mashin / V.E. Torgashev // Inzhenemye resheniya. – 2019. – № 8(9). – S. 7–10.
2. Ribeiro E. A. Passive vibration control in rotor dynamics: optimization of composed support using viscoelastic materials / E. A. Ribeiro, J. T. Pereira, C. A. Bavastri // Journal of Sound and Vibration. – 2015. – 351. – P. 43–56.
3. Osinski Z. (Ed.) Damping of vibrations. CRC Press. 2018.
4. Shen Y. Improved design of dynamic vibration absorber by using the inerter and its application in vehicle suspension / Y. Shen, L. Chen, X. Yang, D. Shi, J. Yang // Journal of Sound and Vibration – 2016. – 361. – P. 148–158.
5. MacCamhaoil M. Static and dynamic balancing of rigid rotors. Bruel & Kjaer application notes BO, 0276-12. 2016.
6. Goroshko A. Balancing of turbomachine rotors by increasing the eccentricity identification accuracy / A. Goroshko, V. Ostaševičius, V. Rozman // Mechanics. – 2016. – 22(3). – P. 206–211.
7. Wan S.K. Active damping of milling chatter vibration via a novel spindle system with an integrated electromagnetic actuator / S.K. Wan, X.H. Li, W.J. Su // Precision Engineering. – 2019. – 57. – P. 203–210.
8. Fan H. W. Adaptive rotor balancing algorithm and single-disk rotation test for electromagnetic balancer / H. W. Fan, J. J. Zhi, B. J. Shi // Journal of Xi'an Jiaotong University. – 2018. – 52(8). – P. 15–21.
9. Peng C. Optimal synchronous vibration control for magnetically suspended centrifugal compressor / C. Peng, J. X. He, M. T. Zhu // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2019. – 132. – P. 776–789.
10. Ulasayar A. Design and analysis of a new magneto rheological damper for washing machine / A. Ulasayar, I. Lazoglu // J Mech Sci Technol. – 2018. – 32. – P. 1549–1561.
11. Pars L.A. Analiticheskaya dinamika / Pars L.A. – M. : Nauka, 1971. – 636 s.
12. Pan X. A Review on Self-Recovery Regulation (SR) Technique for Unbalance Vibration of High-End Equipment / X. Pan, J. Lu, J. Huo // Chin. J. Mech. Eng. – 2020. – 33. – 89 p.
13. Strelkov S.P. Vvedenie v teoriyu kolebaniy : uchenik / Strelkov S.P. – SPb : Izdatel'stvo «Lan'», 2005. – 440 s.
14. Kel'zon A.C. Upravlenie kolebaniyami rotorov / A.C. Kel'zon, L.M. Malinin. – SPb : Politekhnika, 1992. – 120 s.

Рецензія/Peer review : 03.12.2021

Надрукована/Printed : 30.12.2021