

КУДЛАЙ Святослав

Національний технічний університет України
«Київський Політехнічний Інститут імені Ігоря Сікорського»
ORCID ID: [0000-0003-3972-405X](https://orcid.org/0000-0003-3972-405X)
e-mail: slava-16@ukr.net

БОНДАРЕНКО Наталія

Національний технічний університет України
«Київський Політехнічний Інститут імені Ігоря Сікорського»
ORCID ID: [0000-0002-9237-8187](https://orcid.org/0000-0002-9237-8187)
e-mail: nalbondarenko@gmail.com

БОНДАРЕНКО Віктор

Національний технічний університет України
«Київський Політехнічний Інститут імені Ігоря Сікорського»
ORCID: [0000-0003-1663-4799](https://orcid.org/0000-0003-1663-4799)
e-mail: vicbondarenko@gmail.com

ПОБУДОВА ТА ВЕРІФІКАЦІЯ МОДЕЛІ ЦИФРОВОГО ЕКВАЛАЙЗЕРА

Запропоновано підхід до розробки еквалайзера шляхом побудови його математичної моделі, завдяки якій всі операції, в тому числі розрахунок ядра еквалайзера та обробка сигналу, здійснюються єдиним мікроконтролером. Розрахунок ядра зводиться до багаторазового виконання відносно простих операцій, що дозволяє зекономити час та програмну пам'ять. Еквалайзер забезпечує задовільну якість обробки при невеликому порядку фільтра, в якості якого обрано цифровий фільтр з кінцевою імпульсною характеристикою через його лінійну ФЧХ, гарантію стабільності при складній АЧХ, а також властиві йому асоціативність та лінійність, що дозволяє легко відтворити складну АЧХ. Схемо технічна реалізація базується на паралельних смугових фільтрах та фільтрах низьких частот з наступним складанням відфільтрованих та підсилених сигналів. Модель еквалайзера і ядро фільтра низьких частот верифіковані в середовищі GNU Octave. Змодельоване ядро еквалайзера повністю відповідає заданій АЧХ, що підтверджує працездатність моделі.

Ключові слова: еквалайзер, ЦОС, КІХ-фільтр, зортка, Фур'є-образ, модель, GNU Octave

KUDLAI Vladyslav, BONDARENKO Nataliia, BONDARENKO Viktor
National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»

CONSTRUCTION AND VERIFICATION OF A DIGITAL EQUALIZER MODEL

An approach to the development of an equalizer by building its mathematical model based on a microcontroller is proposed. All operations, including signal processing and equalizer kernel calculation, are performed by a single microcontroller. Thanks to the created mathematical model of the equalizer, the calculation of the kernel is reduced to multiple uses of relatively simple operations, which saves time and memory of the program. The equalizer provides satisfactory processing quality at a small filter order which is selected as a digital filter with final impulse response (FIR) because of its linear phase-frequency response, a guarantee of stability at the complex amplitude-frequency response, and also its associativity and linearity allowing it easily reproduce a complex amplitude-frequency response. Schematic implementation is based on parallel bandpass filters and a low-pass filter followed by adding filtered and amplified signals. It is the distributive property of the FIR filter that makes it possible to obtain a new kernel that includes all the amplified ranges by the sum of the corresponding kernel elements, instead of adding amplified ranges. The associativity and linearity of the FIR filter gives the opportunity to easily implement different types of filters on the basis of a low-pass filter, for the calculation of which the cardinal sine function is used together with the window function, which in combination gives qualitative frequency characteristics. The low-pass filter kernel and equalizer model are verified in the GNU Octave environment, which is an open-source analogue of Matlab. The model is checked by setting the frequency response of the test equalizer, and for individual filters the allowable width of the transition band and the maximum value of pulsation in the suppression band are set. The low-pass filter kernel is created with an arbitrary cutoff frequency, and the filter consists of 129 elements, which were multiplied by the Kaiser window with a value of parameter equal to 4.5. As a result of verification of the mathematical model in the GNU Octave environment, the width of the transition band and the maximum value of pulsation in the suppression band meet the specified conditions. The simulated equalizer kernel fully corresponds to the specified frequency response. Verification of the mathematical model confirmed its efficiency and compliance of the obtained characteristics of the equalizer with the specified requirements.

Keywords: equalizer; DSP; FIR filter; convolution; Fourier image; model; GNU Octave.

Постановка проблеми у загальному вигляді

та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями

В роботі пропонується підхід до розробки еквалайзера шляхом побудови його математичної моделі, яка дає змогу мікроконтролеру на основі заданої амплітудно-частотної характеристики (АЧХ) розрахувати коефіцієнти ядра еквалайзера. При розрахунку ядра з нуля на мікроконтролері слід врахувати як його швидкодію, так і наявну для зберігання програми пам'ять. Також при самій обробці сигналу, враховуючи швидкодію мікроконтролера, ядро має забезпечити задовільний результат фільтрації при обмеженій кількості коефіцієнтів. Отже метою роботи є розробка математичної моделі еквалайзера, що дає змогу мікроконтролеру на основі заданої АЧХ розрахувати коефіцієнти ядра еквалайзера і здійснювати обробку сигналу з врахуванням обмежень на пам'ять і швидкодію мікроконтролера.

1. Проектування еквалайзера

Еквалайзер – радіоелектронний пристрій або комп'ютерна програма в складі висококласних стереофонічних комплексів (High Fidelity – Hi-Fi), що дозволяють коригувати амплітуду сигналу в різних діапазонах частот залежно від бажаних частотних характеристик [1]. Тобто, для кожної смуги частот, є свій коефіцієнт підсилення.

Типова реалізація еквалайзера базується на фільтрах частот, що використовуються для відсікання непотрібних складових сигналу, таких як гармоніки з зазначеними частотами. Із всього різноманіття фільтрів (низьких частот (ФНЧ), високих частот (ФВЧ), смугових (СФ), режекторних (РФ), всепропускних (ВФ) [2]) для створення еквалайзера використовуються СФ та ФНЧ.

Типову реалізацію еквалайзера з паралельним з'єднанням фільтрів та подальшим об'єднанням усіх складових в єдиний сигнал показано на рис. 1 [3]. Кожному діапазону частот, а саме $[0; \omega_1]$ та $[\omega_{i1}; \omega_{i2}]$, $i = \overline{2, 4}$ відповідає свій коефіцієнт підсилення K_i , $i = \overline{1, 4}$. Для

встановлення цього підсилення кожний діапазон виділяється з загального сигналу і вже підсилений у діапазоні сигнал додається в загальний вихідний сигнал S_{out} .

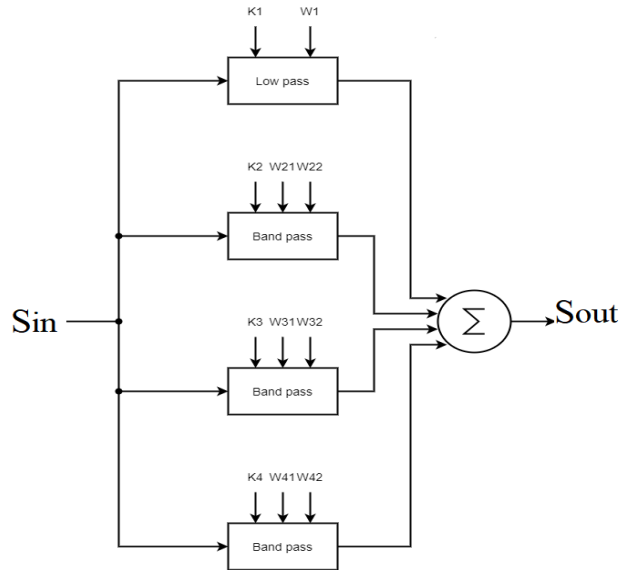


Рис. 1. Функціональна схема еквалайзера

Цифрові фільтри

Цифрові фільтри, з розвитком цифрової та обчислювальної техніки, набули широкого застосування, адже їх реалізація базується на типових для цифрових пристроїв операціях [4, 5]. Вимоги до фільтрів: відносно легкий розрахунок ядра, використовуючи якомога більше одноманітних операцій, та задовільний результат фільтрації при обмеженій кількості коефіцієнтів ядра.

Цифрові фільтри поділяються на два типи:

- з кінцевою імпульсною характеристикою (КІХ);
- з нескінченною імпульсною характеристикою (НІХ).

Також, НІХ фільтри називають рекурсивними. КІХ фільтри ж, в свою чергу, можуть бути як рекурсивними, так і нерекурсивними. Проте на практиці, зазвичай використовуються нерекурсивні, які ще називають згортковими фільтрами. Такі назви пов'язані з принципом роботи фільтрів та виявляють суттєву різницю між ними.

КІХ фільтр є класичним інструментом в цифровій обробці сигналів (ЦОС), що описується виразом наступного вигляду [6]:

$$y(k) = \sum_{i=0}^m b_i x_{k-i}, \quad (1)$$

де $y(k)$ – вихідне значення, x_{k-i} – вхідні відліки, b_i – коефіцієнти ядра фільтра.

Схематично КІХ фільтр реалізується за допомогою блоків:

- затримки;
- множення на константу;
- додавання сигналів.

Фільтрація сигналу в таких фільтрах виконується шляхом згортки вхідного сигналу з ядром фільтра. Ключовою властивістю згортки є те, що згортка двох сигналів еквівалентна перемноженню їх Фур'є образів. В якості ядра фільтра виступає сигнал (послідовність чисел) кінцевої довжини, який має бажану АЧХ.

НІХ фільтр схожий на КІХ фільтр, проте має зворотній зв'язок. Саме зворотній зв'язок забезпечує нескінчену імпульсну характеристику, оскільки в зворотному зв'язку зберігається імпульсна характеристика з попередніх обчислень. В рівнянні (2) зворотній зв'язок реалізується згортокою попередніх вихідних значень з послідовністю a_j , $j = \overline{1, n}$:

$$y(k) = \frac{1}{a_0} \left(\sum_{i=0}^m b_i x_{k-i} - \sum_{j=1}^n a_j y_{k-j} \right), \quad (2)$$

де b_i та a_j є відповідно коефіцієнтами чисельника та знаменника передавальної характеристики. Фактично, в КІХ фільтрі усі коефіцієнти a_j (окрім a_0) дорівнюють нулю, тобто немає зворотного зв'язку.

НІХ фільтр при тій же кількості операцій, що необхідна для КІХ фільтра, має значно кращу амплітудно-частотну характеристику, але фазо-частотна характеристика (ФЧХ) є нелінійною. При проектуванні фільтра даного типу слід враховувати критерій стабільності. КІХ фільтри, в свою чергу, є завжди стабільними та мають лінійну ФЧХ [7, 9]. Недоліком НІХ фільтра є складніше обчислення ядра, в порівнянні з КІХ фільтром.

Не дивлячись на кращу фільтрацію НІХ фільтра, КІХ фільтр має ключову особливість для моделювання еквайзера. Оскільки для фільтрації використовується лише операція згортки, то КІХ фільтр має ті ж властивості, що й згортка. Насамперед, нас цікавлять властивості асоціативності та лінійності. Дані властивості дозволяють створювати нові ядра з вже наявних, таким чином утворюючи ядра зі складними АЧХ. НІХ фільтру вищезазначені властивості згортки не притаманні, що ускладнює створення фільтрів зі складними АЧХ. До того ж такі фільтри можуть бути нестабільними, що обмежує функціональність.

Враховуючи всі переваги та недоліки, в якості основи ядра еквайзера обрано КІХ фільтр як компромісне рішення між складністю обчислення ядра та якістю фільтрації.

Розрахунок ядра ФНЧ

Існує багато способів розрахунку ядра ФНЧ [5,6,7], але в проектуванні фільтра для еквайзера використовуємо *sinc* функцію. Серед переваг даного ядра – якісні частотні характеристики, що звісно впливає на якість часових. Нас цікавлять саме частотні характеристики, тому *sinc* ядро підходить.

Sinc функція є симетричною та визначена на множині вхідних значень $(-\infty; +\infty)$ [8]. КІХ фільтри за визначенням не можуть вмістити усієї імпульсної характеристики такої функції, що впливає на спектр ядра, а також при стандартному розрахунку ядро втрачить симетричність.

Для збереження симетричності достатньо зсунути відліки на половину від розміру послідовності.

Тобто, якщо ядро має M відліків, то його першим елементом вважається $-\frac{M}{2}$ -й відлік, а значення, на яких визначена сама функція ядра, змінюються з $[0; M]$ на $\left[-\frac{M}{2}; +\frac{M}{2}\right]$. Хоча таке рішення змінить фазову характеристику, проте вона залишиться лінійною.

При розширенні ядра до його країв приєднують нульові значення. Це обумовлює обрив сигналу, а разом з тим й втрату частини спектру, що приводить до ефекту Гіббса. Для запобігання ефекту Гіббса використовують віконну функцію. Множення коефіцієнтів ядра на дану функцію дає поступове ослаблення сигналу від центральної точки, і таким чином *sinc* функція не буде різко обриватися. Враховуючи віконну функцію, формула ядра ФНЧ має вигляд:

$$\begin{cases} h_i = K \frac{\sin(2\pi f_c \cdot (i - M/2))}{i - M/2} \cdot W(i - M/2), i \neq M/2, \\ h_i = 2\pi f_c \cdot K \cdot W(0), i = M/2 \end{cases}, \quad (3)$$

де K – константа нормування одиничного підсилення на нульовій частоті;

f_c – частота зрізу відносно частоти дискретизації, $f_c \in [0; 0,5]$;

$W(i - M/2)$ – віконна функція.

Віконна функція Кайзера

Існує велика кількість віконних функцій та їх модифікацій [7, 8]. Серед них вирішено обрати параметричне вікно Кайзера [8], яке широко використовується в ЦОС, оскільки є апроксимацією оптимального розподілу з точки зору концентрації енергії в головному пелюстку спектра. Такий вибір дозволив отримати близьку до мінімально можливої перехідну смугу цифрового фільтра. Крім того, можливість регулювання рівня бічних пелюсток за рахунок зміни параметра вікна, робить його дуже зручним в задачах проектування КІХ фільтра віконним методом. Вікно Кайзера представляється наступним рівнянням:

$$w(n) = \frac{I_0\left(\beta \sqrt{1 - (2(n - N/2)/N)^2}\right)}{I_0(\beta)}, \quad (4)$$

де $-\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2}$;

I_0 – модифікована функція Бесселя першого роду нульового порядку;

β – параметр вікна.

На практиці β приймає значення в межах $2 < \beta < 16$, але з (4) можна бачити, що при збільшенні параметра β рівень бічних пелюсток віконної функції зменшується.

Обчислення вікна Кайзера відносно інших вікон – задача не складна. Модифікована функція Бесселя першого роду нульового порядку [9] на множині натуральних чисел приймає вигляд:

$$I_0(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{2k}}{k!^2} . \quad (5)$$

Таку функцію легко реалізувати одним циклом, що буде обмежений деякою точністю ε , при досягненні якої ряд буде обрізано. Функція кореня доволі швидко обчислюється, а у STM 32 (Cortex M4) навіть наявна команда асемблера для обчислення кореня чисельним методом Ньютона-Рафсона [10]. $I_0(\beta)$ при фіксованому β є константою, а отже обчислюється при компіляції.

Побудова складних фільтрів

На основі ФНЧ та ВФ можна побудувати інші типи фільтрів. Теоретичним підґрунтям слугують вищезазначені властивості згортки, а саме: асоціативність та лінійність.

Завдяки лінійності, властивій Фур'є - образам сигналів, ФВЧ можна описати як різницю між сигналом, пропущеним крізь ВФ, та сигналом, пропущеним через ФНЧ:

$$\Phi ВЧ(s) = ВФ(s) - \Phi НЧ(s) .$$

Враховуючи, що фільтрація в КІХ фільтрах реалізується згорткою, вищезазначене рівняння можна скоротити до вигляду:

$$s * b_{\Phi ВЧ} = s * (b_{ВФ} - b_{\Phi НЧ}) .$$

Прибираючи згортку з сигналом, отримуємо формулу ядра ФВЧ:

$$b_{\Phi ВЧ} = (b_{ВФ} - b_{\Phi НЧ}) . \quad (6)$$

Ядро ВФ являє собою одиничний імпульс, саме таке ядро дозволить пропустити сигнал без змін [8].

Враховуючи зсув на $\frac{M}{2}$, виходить, що для отримання ядра ФВЧ достатньо від нульового відліку (з врахуванням зсуву) ядра ФНЧ відняти одиницю. А отже фінальна формула ядра ФВЧ наступна:

$$\begin{cases} h_i = -K \frac{\sin(2\pi f_c \cdot (i - M/2))}{i - M/2} \cdot W(i - M/2), i \neq M/2 \\ h_i = K(1 - 2\pi f_c) \cdot W(0), i = M/2 \end{cases} \quad (7)$$

СФ отримується шляхом згортки ядер ФВЧ та ФНЧ.

$$b_{СФ}^{f_1, f_2} = b_{\Phi ВЧ}^{f_1} * b_{\Phi НЧ}^{f_2}, f_1 < f_2 . \quad (8)$$

При згортці даних двох ядер, залишиться лише спільний для двох фільтрів діапазон частот, всі інші частоти будуть взаємно пригнічені. Цей діапазон частот якраз складає $[f_1; f_2]$. Для побудови СФ беруться попередньо виведені фільтри. При цьому розмір такого ядра згідно операції згортки: $2M - 1$. Слід зазначити, що при рівності двох частот зрізу, фільтр пропускатиме дану частоту з підсиленням $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$,

оскільки на частоті зрізу підсилення сигналу дорівнює $\frac{1}{\sqrt{2}}$ [5].

Отже, розглянуті підходи до побудови СФ та ФНЧ дають змогу отримати ядра фільтрів, необхідних для побудови еквалайзера, представленого на рис. 1. Для підсилення відфільтрованого сигналу, необхідно всі елементи ядра фільтра помножити на заданий коефіцієнт підсилення, враховуючи, що початково ядра проєктуються з одиничним підсиленням. Притаманна згортці лінійність дозволяє побудувати ядро еквалайзера як доданок ядер, попередньо створених фільтрів

$$b_k^{екв} = \sum_{i=0}^I K_i b_k^i, k = 0, 2N - 2, \quad (9)$$

де $b_k^{екв}$ – k -й елемент ядра еквалайзера, K_i – коефіцієнт підсилення i -го фільтра, b_k^i – k -й елемент i -го фільтра,

I – загальна кількість фільтрів. Всі фільтри мають однаковий порядок. Слід зазначити, що фільтр b^0 є ФНЧ розміру $2M - 1$.

Побудована математична модель дає змогу мікроконтролеру розрахувати ядро еквалайзера для подальшої обробки сигналу. Проте, перед використанням для довільного кристалу, слід врахувати його обчислювальну здатність, оскільки за час періоду дискретизації сигналу мікроконтролер має встигнути обчислити нове значення вихідного сигналу.

Верифікація математичної моделі еквалайзера

Для верифікації математичної моделі обрано програмне середовище GNU Octave [11], яке є аналогом з відкритим кодом відомого середовища Matlab. Зокрема, в ньому наявний пакет для роботи з сигналами (signal), необхідний для перевірки ядра еквалайзера. Додатково в цьому середовищі створені функції для розрахунку ядра еквалайзера.

В якості вхідних даних задається АЧХ конкретного еквалайзера, а також вимоги до окремих фільтрів. Процедура верифікації включає в себе створення ядра еквалайзера з заданими параметрами та перевірку на їх відповідність за допомогою функції freqz.

Тестовий еквалайзер має характеристики підсилення діапазонів, вказані в таблиці.

Таблиця

АЧХ тестового еквалайзера

Діапазон частот, Гц	Коефіцієнт підсилення
0000 – 1000	1,0
1000 – 2000	1,5
2000 – 3000	1,0
3000 – 4000	2,0
4000 – 5000	0,8

При цьому перехідна смуга не перевищує 300 Гц, а на одиничному підсиленні максимальна амплітуда пульсації в зоні пригнічення не перевищує -50 дБ.

Оскільки смугові фільтри будуються з ФНЧ та ФВЧ, а ФВЧ, в свою чергу, утворюється з ФНЧ, тому є сенс перевірити на якість фільтрації саме ФНЧ. В даному випадку береться ядро розміром 129 з частотою зрізу 3000 Гц.

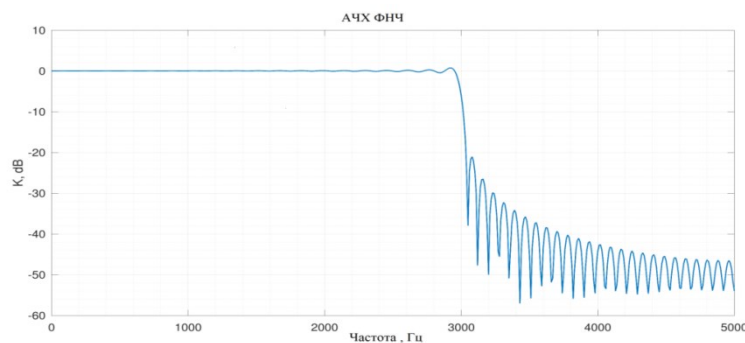


Рис. 2. АЧХ тестового ФНЧ

Як видно з рис. 2, перехідна смуга складає приблизно 200 Гц, що обумовлено вибраним порядком.

Проте максимальне значення пульсації в смузі пригнічення досягає майже -20 дБ, що забагато для обраних умов. Для зменшення ефекту пульсації використовується віконна функція.

У ФНЧ, АЧХ якого зображена на рис. 3, *sinc* функція згладжена вікном Кайзера з коефіцієнтом $\beta = 4,5$. Тепер максимальне значення пульсації складає приблизно -50 дБ, що вже є прийнятним. А пригнічення в кінці перехідної смуги дорівнює -76 дБ, проти -38 дБ без використання вікна. Також дане вікно згладило пульсацію в кінці смуги пропускання. Надалі, для побудови ядра еквалайзера, використовується саме такий параметр вікна. Результат верифікації наведено на рис. 4.

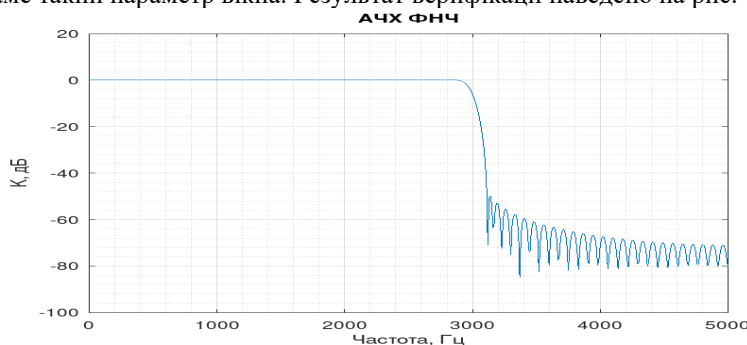


Рис. 3. АЧХ ФНЧ з використанням вікна Кайзера

На графіку з рис. 4 коефіцієнт підсилення вже вимірюється не в децибелах. Це зроблено для ілюстрації відповідності АЧХ еквайзера, заданої в таблиці, отриманій характеристичі.

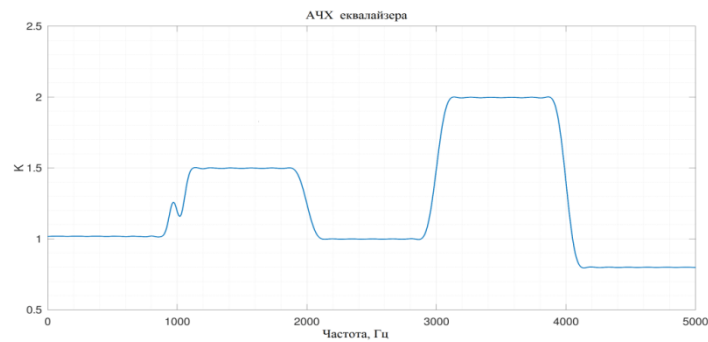


Рис. 4. АЧХ еквайзера

Пульсація на частоті 1000 Гц обумовлена різними порядками ядер ФНЧ та ФВЧ, які мають одну й ту саму частоту зрізу. Проте її вплив на роботу є достатньо малим, тому їм можна знехтувати. Таким чином, працездатність математичної моделі еквайзера практично перевірена комп'ютерним моделюванням.

Висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямі

В роботі запропоновано підхід до розробки еквайзера, результатом якого є побудована математична модель, що дає змогу мікроконтролеру розрахувати ядро еквайзера без попереднього розрахунку ядра на комп'ютері. Дана модель розроблена з оглядом на відносно простий розрахунок з використанням одноманітних операцій задля економії програмної пам'яті мікроконтролера. При цьому отримане ядро еквайзера має задовільні характеристики, що в сукупності з використанням єдиного ядра дозволяє підвищити максимальну робочу частоту дискретизації. В результаті верифікації математичної моделі в середовищі GNU Octave, отримана ширина смуги переходу і максимальне значення пульсації в смузі пригнічення відповідають заданим умовам. Змодельоване ядро еквайзера повністю відповідає заданій АЧХ. Таким чином, верифікація математичної моделі підтвердила її працездатність і відповідність отриманих характеристик еквайзера заявленим вимогам.

Література

1. Солонина А.И. Цифровая обработка сигналов в зеркале MATLAB : учеб.пособие. СПб : БХВ-Петербург, 2018. 560 с. ISBN: 978-5-9775-3946-3
2. Капитонов А. Основы цифровой обработки сигналов : курс лекций. Хабр., 2019. <https://habr.com/ru/post/460445/>
3. Välimäki V., Reiss J.D. All About Audio Equalization: Solutions and Frontiers. *Applied Sciences*, 2016; 6(5):129. URL: <https://doi.org/10.3390/app6050129>
4. Умняшкин С.В. Основы теории цифровой обработки сигналов. Изд. 5-е. М.: Техносфера, 2019. 549 с. ISBN 978-5-94836-557-2
5. Emmanuel C. Ifeachor, Barrie W. Jervis. Digital Signal Processing: A Practical Approach, 2nd Edition, 2002. ISBN-13: 978-0201596199
6. Oppenheim A., Schaffer R. Discrete-Time Signal Processing, 3rd ed. 2014. ISBN-9781292025728 1292025727
7. Lyons R. Streamlining Digital Signal Processing (2nd Edition). Monography, Wiley-IEEE Press, 2012. 496 p. ISBN-13: 978-1-118-27838-3
8. Smith S. Digital Signal Processing: A Practical Guide for Engineers and Scientists, 1st ed. 2013. 672p. ISBN: 0080477321, 9780080477329
9. Weisstein E. Modified Bessel Function of the First Kind. Wolfram. 2021. URL: <https://mathworld.wolfram.com/ModifiedBesselFunctionoftheFirstKind.html>
10. Zhu Y. Embedded Systems with ARM Cortex-M Microcontrollers in AssemblyLanguage and C, Ed. Orono, Maine. 2017. 722 p.
11. John W. Eaton David Bateman Søren Hauberg Rik Wehbring GNU Octave version 6.3.0: A high-level interactive language for numerical computations, 6th ed., 2021. 1125 p.

References

1. Solonina A.I. Cifrovaya obrabotka signalov v zerkale MATLAB : ucheb.posobie. SPb : BHV-Peterburg, 2018. 560 s. ISBN: 978-5-9775-3946-3
2. Kapitonov A. Osnovy cifrovoj obrabotki signalov : kurs lekcij. Habr., 2019. <https://habr.com/ru/post/460445/>
3. Valimaki V., Reiss J.D. All About Audio Equalization: Solutions and Frontiers. *Applied Sciences*, 2016; 6(5):129. URL: <https://doi.org/10.3390/app6050129>
4. Umnyashkin S.V. Osnovy teorii cifrovoj obrabotki signalov. Izd. 5-e. M.: Tehnosfera, 2019. 549 s. ISBN 978-5-94836-557-2

-
5. Emmanuel C. Ifeakor, Barrie W. Jervis. Digital Signal Processing: A Practical Approach, 2nd Edition, 2002. ISBN-13: 978-0201596199
 6. Oppenheim A., Schafer R. Discrete-Time Signal Processing, 3rd ed. 2014. ISBN-9781292025728 1292025727
 7. Lyons R. Streamlining Digital Signal Processing (2nd Edition). Monography, Wiley-IEEE Press, 2012. 496 p. ISBN-13: 978-1-118-27838-3
 8. Smith S. Digital Signal Processing: A Practical Guide for Engineers and Scientists, 1st ed. 2013. 672p. ISBN: 0080477321, 9780080477329
 9. Weisstein E. Modified Bessel Function of the First Kind. Wolfram. 2021. URL: <https://mathworld.wolfram.com/ModifiedBesselFunctionoftheFirstKind.html>
 10. Zhu Y. Embedded Systems with ARM Cortex-M Microcontrollers in AssemblyLanguage and C, Ed. Orono, Maine. 2017. 722 p.
 11. John W. Eaton David Bateman Søren Hauberg Rik Wehbring GNU Octave version 6.3.0: A high-level interactive language for numerical computations, 6th ed., 2021. 1125 p.

Надійшла/Paper received : 13.08.2022 p. Надрукована/Printed :01.11.2022 p.